Министерство образования Республики Беларусь

**Учреждение образования**
**«Гомельский государственный университет**
**имени Франциска Скорины»**

**В. Н. СЕМЕНЧУК**

# ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

**Гомель 2007**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

**Учреждение образования**
**«Гомельский государственный университет**
**имени Франциска Скорины»**

**В. Н. СЕМЕНЧУК**

# ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

КУРС ЛЕКЦИЙ
*для студентов специальности*
*1-31 03 03 «Прикладная математика»*

**Гомель 2007**

УДК 519.14(075.8)
ББК 22.174 я73
С 305

**Рецензенты:**
А. Н. Скиба**,** профессор, доктор физико-математических наук;
кафедра высшей математики учреждения образования
«Гомельский государственный университет имени
Франциска Скорины»

Рекомендовано к изданию научно-методическим
советом учреждения образования «Гомельский
государственный университет имени Франциска Скорины»

**Семенчук, В. Н.**
С 305 Дискретная математика [Текст]: курс лекций для студентов специальности 1-31 03 03 «Прикладная математика» / В.Н. Семенчук; М-во образов. РБ, Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины.– Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2007.– с.

ISBN

Курс лекций по дискретной математике ставит своей целью оказание помощи студентам в усвоении основных положений дискретной математики и адресован студентам 1 курса специальности 1-31 03 03 «Прикладная математика».

УДК 519.14(075.8)
ББК 22.174 я73

ISBN

## СОДЕРЖАНИЕ

## ВВЕДЕНИЕ

Дискретная математика – часть математики, которая зародилась в глубокой древности.  Главной её спецификой является дискретность, т.е. антипод непрерывности. В широком смысле дискретная математика включает в себя и такие сложившиеся разделы математики, как теория чисел, алгебра, математическая логика, а также ряд разделов, которые наиболее интенсивно стали развиваться в середине 20-го века благодаря научно-техническому прогрессу, поставившему изучение сложных управляющих систем. В узком смысле дискретная математика ограничивается только этими новыми разделами. К упомянутым новым разделам мы относим: теории функциональных систем, теорию алгоритмов, теорию конечных автоматов и т.п. Именно эти разделы дискретной математики и рассматриваются в данном курсе.

Дискретная математика сегодня является не только фундаментом математической кибернетики, но и важным звеном математического образования.

Главной задачей курса лекций является овладение студентами методами и мышлением, характерными для дискретной математики. Материал, вошедший в курс, знакомит студентов с теорией булевых функций, теорией конечных автоматов, теорией алгоритмов и алгебры логики предикатов. Данный курс лекций составлен таким образом, чтобы сократить число необходимых понятий до минимума и, с другой стороны, дать небольшое количество серьезных теорем.

Раздел теории булевых функций является основополагающим при изучении дискретной математики. В лекционном курсе и на практических занятиях ему отводится около четверти всего учебного времени. На материале этого раздела студенты получают первоначальное представление о таких понятиях, как булева функция, операция суперпозиции, функционально полная система. Студенты знакомятся с различными способами заданий булевых функций (табличный способ, представление полиномами и нормальными формами, геометрическое представление с использованием трехмерного куба); изучают применение исследования полноты и замкнутости систем функций, изучают одно из приложений теории булевых функций – релейно-контактные и релейно-логические схемы.

В разделе алгебры логики предикатов излагаются основные сведения из теории предикатов. Данная теория представляет собой более точный инструмент по сравнению с теорией высказываний, которая рассматривается в первом разделе.

В разделе конечные автоматы изучаются детерминированные и ограниченно-детерминированные функции.

В разделе элементы теории алгоритмов изучается строгое математическое определение теории алгоритмов, предложенное Тьюрингом – машина Тьюринга; примитивно-рекурсивные и частично-рекурсивные функции, а также устанавливается их связь с функциями вычислимыми по Тьюрингу.

## ТЕМА 1 ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

1.1 Логические операции

1.2 Булевы функции

Основными объектами дискретной математики являются булевы функции. Предпосылкой их введения служат высказывания, которые составляют основную базу для построения теории булевых функций.

### 1.1 Логические операции.

Алгебра логики – самый простой раздел математической логики. Язык алгебры логики является одним из простейших языков математики. Основными объектами данного раздела являются высказывания. Понятие «высказывание» является первичным, оно не определяется, а поясняется. Под высказыванием понимают предложение, о котором можно сказать одно из двух: истинно оно или ложно. Например, высказывание «$2 + 3 = 5$» – истинное, высказывание «существует действительное число $x$ такое, что $x^2 = -1$» – ложное. Очевидно, не каждое предложение является высказыванием. Например, предложения: «Когда ты был дома?», «Пойдем со мной!» не являются высказываниями. Высказывания будем обозначать малыми латинскими буквами $x, y, z,\ldots,$ а их значения, т.е. истину и ложь, соответственно 1 и 0. Из двух данных высказываний с помощью связок «не», «и», «или», «если … то», «тогда и только тогда, когда …» можно образовать новые высказывания. Например, из высказываний «число 2 простое», «число 2 четное» с помощью указанных выше связок получаем высказывания: «число два простое и четное», «число 2 непростое», «число 2 простое или четное». Высказывание «если $\pi$ иррационально, то $\pi^2$ тоже иррационально» получается связыванием двух высказываний связкой «если … то». Эти операции соответствуют упомянутым выше связкам, употребляемым в обычной речи.

Рассмотрим примеры логических операций.

1 Логическая операция, соответствующая связке «и», называется **конъюнкцией** и обозначается &. В некоторых книгах эту операцию обозначают символом $\wedge$. Пусть $x$ и у – высказывания. Высказывание $x$·у назовем конъюнкцией $x$ и $y$. Данное высказывание истинно тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания $x$ и $y$.

Соответствующее определение запишем в виде таблицы истинности:

| $x$ | $y$ | $xy$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Определение конъюнкции двух высказываний естественным образом распространяется на любое конечное число высказываний.

Конъюнкция $x_1x_2...x_n$, которую мы кратко обозначим через $\wedge_{i=1}^{n} x_i$, истинна тогда и только тогда, когда истинны все высказывания.

2 Логическая операция, соответствующая связке «или», называется **дизъюнкцией** и обозначается $\vee$.

Пусть $x$ и $y$ – высказывания. Высказывание $x \vee y$ назовем дизъюнкцией $x$ и $y$. Данное высказывание истинно тогда и только тогда, когда хотя бы одно из высказываний $x$ и $y$ истинно.

Данное определение запишем в таблицы истинности:

| $x$ | $y$ | $x \vee y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Определение дизъюнкции двух высказываний естественным образом распространяется на любое конечное число высказываний. Дизъюнкция

$x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$, которую мы кратко обозначим через $\vee_{i=1}^{n} x_i$, истинна тогда и только тогда, когда хотя бы одно из высказываний $x_1, x_2, \ldots, x_n$ истинно.

3 Логическая операция, соответствующая связке «не», называется **отрицанием**.

Отрицание высказывания $x$ записывается так: $\bar{x}$ и определяется следующей таблицей истинности:

| $x$ | $\bar{x}$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

4 Логическая операция, соответствующая связке «если … то», называется **импликацией**. Эту операцию будем обозначать символом $\Rightarrow$. При этом высказывание «если $x$, то $y$» записывается в виде $x \Rightarrow y$. Высказывание $x$ называется посылкой импликации, $y$ – ее заключением. Импликация двух высказываний $x$ и $y$ задается следующей таблицей истинности:

| $x$ | $y$ | $x \Rightarrow y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Из определения импликации вытекает, что:

- импликация с ложной посылкой всегда истинна;
- импликация с истинным заключением всегда истинна;
- импликация ложна тогда и только тогда, когда посылка истинна, а заключение ложно.

5 Логическая операция, соответствующая связке «тогда и только тогда, когда …» называется **эквивалентностью** и обозначается символом $\Leftrightarrow$.

Пусть $x$ и $y$ – высказывания. Высказывание $x \Leftrightarrow y$ назовем эквивалентностью $x$ и $y$. Данное высказывание истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания $x$ и $y$ или истинны или ложны.

Данное определение запишем в виде таблицы истинности:

| $x$ | $y$ | $x \leftrightarrow y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

### 1.2 Булевы функции.

Пусть $\{x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ..., x_n, y_n, z_n, ...\}$ исходный алфавит переменных.

**Функцией алгебры логики** $f(x_1, x_2, ..., x_n)$**от переменных** $x_1, x_2, ..., x_n$ называется функция, принимающая значения 1, 0 и аргументы которой также принимают значения 1, 0.

Обычно функции алгебры логики называют булевыми функциями. Название «булевы функции» возникло в связи с использованием функций рассматриваемого типа в алгебре логики, начало которой было положено трудами ирландского ученого 19 века Дж. Буля. Областью определения булевой функции от n переменных служит совокупность всевозможных n-мерных упорядоченных наборов $(x_1, x_2, ..., x_n)$, где $x_i \in \{0,1\}$.

Следует отметить, что любой такой набор можно рассматривать как представление некоторого целого неотрицательного числа в двоичной системе счисления. Например, набору (0,1,0,1) соответствует число $1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 = 5$, а набору (1,1,1) – число $1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 = 7$.

Все наборы размерности n нумеруются целыми числами от $0, 2^n$-1. Отсюда нетрудно заметить, что число таких наборов равно $2^n$.

Всякая булева функция от n переменных может быть задана с помощью таблицы истинности:

| $x_1$ | $x_2$ | … | $x_{n-1}$ | $x_n$ | $f(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | … | 0 | 0 | f (0,0,…,0,0) |
| 0 | 0 | … | 0 | 1 | f (0,0,…,0,1) |
| 0 | 0 | … | 1 | 0 | f (0,0,…,1,0) |
| … | … | … | … | … | … |
| 1 | 1 | … | 1 | 1 | f (1,1,…,1,1) |

Данная таблица состоит из $2^n$ строк, причем в ней все наборы $(x_1, x_2, ..., x_n)$ расположены в порядке возрастания их номеров.

Очевидно, что булевы функции от n переменных однозначно определяются своими последними столбцами из этой таблицы, т.е. наборами из $2^n$ нулей и единиц. Следовательно, различных булевых функций от n переменных будет столько, сколько имеется различных наборов длины $2^n$, а их число равно $2^{2^n}$. Итак, мы доказали следующую теорему:

**Теорема 1** *Имеется точно* $2^{2^n}$ *булевых функций от* $n$ *переменных.*

В алгебре логики особое значение имеют следующие булевы функции, которые называют элементарными булевыми функциями:

1) $f_1(x) = 0$ – константа 0;

2) $f_2(x) = 1$ – константа 1;

3) $f_3(x) = x$ – тождественная функция;

4) $f_4(x) = \overline{x}$ – отрицание x;

5) $f_5(x, y) = x \cdot y$ – конъюнкция *x* и y;

6) $f_6(x, y) = x \vee y$ – дизъюнкция x и y;

7) $f_7(x, y) = x \Rightarrow y$ – импликация x и y;

8) $f_8(x, y) = x \Leftrightarrow y$ – эквивалентность x и y;

9) $f_9(x, y) = x + y$ – сложение x и y по mod2;

10) $f_{10}(x, y) = x \mid y$ – функция Шеффера;

11) $f_{11}(x, y) = x \downarrow y$ – стрелка Пирса.

Последние три функции задаются следующими таблицами истинности:

| $x$ | $y$ | $x+y$ | $x\mid y$ | $x\downarrow y$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Введенное понятие булевой функции несовершенно тем, что оно не позволяет рассматривать функцию от меньшего числа аргументов как функцию от большего числа аргументов. Для устранения этого недостатка введем понятие фиктивной переменной.

Переменная $x_i$ в функции $f(x_1, x_2,..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_n)$ называется **фиктивной**, если $f(x_1, x_2,..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, x_n) = f(x_1, x_2,..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, x_n)$ при любых значениях остальных переменных. В этом случае функция $f(x_1, x_2,..., x_n)$, по существу, зависит от *(n-1)* – переменной, т.е. представляет собой функцию $g(x_1, x_2,..., x_{i-1}, x_{i+1}, x_n)$ от *(n-1)* переменной. Говорят, что функция $g$ получается из функции $f$ удалением фиктивной переменной, а функция $f$ получается из $g$ введением фиктивной переменной, причем эти функции являются равными.

Благодаря введению фиктивных переменных любую булеву функцию от $n$ переменных можно считать функцией от любого большего числа переменных. Поэтому любую конечную совокупность булевых функций можно считать зависящими от одного и того же числа переменных.

**Вопросы для самоконтроля**

1 Дайте определение основных логических операций булевой алгебры.

2 Дайте определение булевой функции.

3 Что такое таблицы истинности булевой функции?

4 Каково число булевых функций от $n$ переменных?

5 Какие булевы функции называются элементарными?

## ТЕМА 2 ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

2.1 Равносильные формулы алгебры логики

2.2 Законы алгебры логики

Как и в элементарной математике из «элементарных» булевых функций с помощью логических операций можно строить формулы. В настоящем разделе изучаются формулы алгебры логики.

### 2.1 Равносильные формулы алгебры логики.

Приведем определение формулы алгебры логики.

*1) каждая «элементарная» булева функция – формула;*

*2) если некоторое выражение N есть формула, то* $\overline{N}$ *тоже формула;*

*3) если некоторые выражения M и N есть формулы, то выражения* $N \vee M$, $N \cdot M$, $N \Rightarrow M$, $N \Leftrightarrow M$ *тоже формулы;*

*4) других формул, кроме построенных по п.п.1), 2), 3), нет.*

Формулы алгебры логики мы будет обозначать большими N, M, … Например, следующие выражения являются формулами алгебры логики:

$$(x \vee y)(x \downarrow \overline{x}),\ (x + y) \vee (x \mid y).$$

С целью упрощения формул, условимся, что операция конъюнкции «сильнее» операций дизъюнкции, импликации и эквивалентности, т.е. если нет скобок, то вначале выполняется операция конъюнкции.

Формула алгебры логики определяет некоторую булеву функцию, значение которой совпадает со значениями данной формулы для всех наборов значений переменных.

Две формулы N и M называются **равносильными**, если они определяют одну и ту же булеву функцию (запись N = M будет означать, что формулы N и M равносильны).

**Пример 1** Формулы $\overline{xy}$ и $\overline{x} \vee \overline{y}$ равносильны, т.е. $\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}$.

Действительно, построим таблицы истинности для данных формул.

| $x$ | $y$ | $xy$ | $\overline{xy}$ | $\overline{x}$ | $\overline{y}$ | $\overline{x} \vee \overline{y}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Из таблиц видно, что формулы $\overline{xy}$ и $\overline{x} \vee \overline{y}$ определяют одну и ту же булеву функцию и, следовательно, являются равносильными.

Очевидно, что отношение равносильности формул алгебры логики является:

1) рефлексивным, т.е. N = N для любой формулы N;
2) симметричным, т.е. если N = M, то M = N для любых формул N и M;
3) транзитивным, т.е. если N = M и M = J, то N = J для любых формул N,M,J.

Таким образом, отношение равносильности является отношением эквивалентности.

Если какую-нибудь формулу $N_1$, являющуюся частью формулы N заменить формулой $N_2$, равносильной $N_1$, то полученная формула окажется равносильной N. Это свойство лежит в основе преобразования формул с целью их упрощения или приведения к определенной форме.

При преобразовании формул алгебры логики используются свойства логических операций, которые будут рассмотрены ниже.

## **2.2 Законы алгебры логики**.

Приведем перечень важнейших равносильностей (законов) алгебры логики. Эти равносильности выражают свойства логических операций.

1) $x = x$ – закон тождества;
2) $x \cdot \overline{x} = 0$ – закон противоречия;
3) $x \vee \overline{x} = 1$ – закон исключительного третьего;
4) $\overline{\overline{x}} = x$ – закон двойного отрицания;

5) $xx = x$, $x \vee x = x$ – законы идемпотентности;

6) $xy = yx$, $x \vee y = y \vee x$ – законы коммутативности;

7) $x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$, $x(y \vee x) = xy \vee xz$ – законы дистрибутивности;

8) $x(yz) = (xy)z$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ – законы ассоциативности;

9) $\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}$, $\overline{x \vee y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$ – законы де Моргана;

10) $x \cdot 1 = x$, $x \vee 0 = x$

11) $x \cdot 0 = 0$, $x \vee 1 = 1$

12) $x(x \vee y) = x$, $x \vee xy = x$ – законы поглощения;

13) $(x \vee y)(\overline{x} \vee y) = y$, $xy \vee \overline{x}y = y$ – законы склеивания.

Перечисленные законы алгебры логики доказываются с помощью таблиц истинности. В качестве примера докажем справедливость закона $x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$.

| $x$ | $y$ | $z$ | $yz$ | $x \vee yz$ | $x \vee y$ | $x \vee z$ | $(x \vee y)(x \vee z)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Из таблиц видно, что формулы $x \vee yz$ и $(x \vee y)(x \vee z)$ определяют одну и ту же булеву функцию. Следовательно, они равносильны.

Логические операции – конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквивалентность, вообще говоря, не являются независимыми друг от друга. В самом деле,

$$x \Rightarrow y = \overline{x} \vee y, \quad x \Leftrightarrow y = xy \vee \overline{x}\overline{y};$$

$$xy = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}, \quad x \vee y = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}}.$$

Первые две равносильности легко доказываются с помощью таблиц истинности. Две последние равносильности докажем с помощью законов де Моргана и двойного отрицания:

$\overline{\bar{x} \vee \bar{y}} = \bar{\bar{x}} \cdot \bar{\bar{y}} = xy$; $\overline{\bar{x} \cdot \bar{y}} = \bar{\bar{x}} \vee \bar{\bar{y}} = x \vee y$.

Итак, справедливы следующие утверждения:

1) импликацию и эквивалентность можно выразить через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание;

2) конъюнкцию можно выразить через дизъюнкцию и отрицание;

3) дизъюнкцию можно выразить через конъюнкцию и отрицание;

4) все операции посредством равносильных выражений можно заменить двумя: конъюнкцией и отрицанием или дизъюнкцией и отрицанием.

Естественно возникает следующий вопрос. Для чего вводить пять логических операций, когда можно обойтись двумя? Использование лишь двух операций существенным образом усложнило бы запись, что привело бы к громоздким формулам. Однако в некоторых приложениях математической логики удобно ограничиться двумя операциями. Аналогичная ситуация имеет место в арифметике. Всякое натуральное число можно записать с помощью цифр 0 и 1. Однако записи чисел и выкладки в двоичной системе громоздки. К этой системе прибегают лишь в некоторых случаях.

Множество булевых функций, рассматриваемое вместе с операциями отрицания, конъюнкции и дизъюнкции, называют **булевой алгеброй**. Законы 1-13 являются **основными законами булевой алгебры**.

Обратим внимание на характер соответствий между равносильностями, объединенными в пару под номерами (5-13). В этих соответствиях проявляется так называемый закон двойственности.

Назовем формулу алгебры логики $N^*(x_1, x_2, ..., x_n)$ **двойственной к формуле** $N(x_1, x_2, ..., x_n)$, если $N^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{N}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$.

Будем говорить, что операция конъюнкции двойственна операции дизъюнкции и наоборот.

Как показано в пункте 2.2, всякая формула алгебры логики может быть приведена равносильными преобразованиями к формуле, содержащей только операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Поэтому, учитывая законы де Моргана и двойного отрицания, две формулы алгебры логики N и M, содержащие только операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, будут двойственными, если одна получается из другой заменой каждой операции на двойственную и 1 заменяется на 0, а 0 на 1.

Например, формула $xy \vee \overline{z}$ двойственная к формуле $(x \vee y)\overline{z}$, а формула $x(\overline{y} \vee z)$ двойственная к формуле $x \vee \overline{y}z$.

Теперь сформулируем закон двойственности.

**Теорема 1** *Если формулы алгебры логики N и M равносильны, то и двойственные им формулы $N^*$ и $M^*$ равносильны.*

Докажем данный закон. Пусть $N(x_1,x_2,\ldots,x_n) = M(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Согласно определению двойственной формулы

$$N^*(x_1, x_2,..., x_n) = \overline{N}(\overline{x_1}, \overline{x_2},..., \overline{x_n}) \text{ и } M^*(x_1, x_2,..., x_n) = \overline{M}(\overline{x_1}, \overline{x_2},..., \overline{x_n}).$$

Так как $N(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $M(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ принимают одинаковые значения при любых значениях переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$, то

$$N(\overline{x_1}, \overline{x_2},..., \overline{x_n}) = M(\overline{x_1}, \overline{x_2},..., \overline{x_n}).$$

Отсюда следует, что

$$\overline{N}(\overline{x_1}, \overline{x_2},..., \overline{x_n}) = \overline{M}(\overline{x_1}, \overline{x_2},..., \overline{x_n}).$$

Так как формулы $N^*(x_1, x_2,..., x_n)$ и $M^*(x_1, x_2,..., x_n)$ равносильны соответственно формулам $\overline{N}(\overline{x_1}, \overline{x_2},..., \overline{x_n})$ и $\overline{M}(\overline{x_1}, \overline{x_2},..., \overline{x_n})$, то они равносильны между собой.

Принцип двойственности позволяет сократить усилие на вывод равносильностей.

**Пример 2** Из равносильности $\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}$ вытекает равносильность $\overline{x \vee y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$. Из равносильности $x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$ вытекает равносильность $x(y \vee z) = xy \vee xz$.

**Вопросы для самоконтроля**

1 Дайте определение формулы алгебры логики.

2 Какие формулы алгебры логики называются равносильными?

3 Сформулируйте законы алгебры логики.

4 Какая формула алгебры логики называется двойственной к данной формуле алгебры логики?

5 Сформулируйте принцип двойственности.

**ТЕМА 3 НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ**

3.1 Разложение булевых функций по переменным

3.2 Алгебра Жегалкина

Выше мы показали, что любая булева функция может быть задана с помощью таблицы истинности. В настоящем разделе излагается переход от табличного перехода задания функции к аналитическому.

**3.1 Разложение булевых функций по переменным.**

Пусть G – параметр, равный 0 или 1. Введем обозначение:

$$x^G = \begin{cases} x, если\, G = 1 \\ \bar{x}, если\, G = 0 \end{cases}$$

Проверкой легко установить, что $x^G$ = 1, тогда и только тогда, когда $x$ = G. Отсюда следует, конъюнкция $x_1^{G1} x_2^{G2} ... x_3^{G3}$ равна 1 (здесь G равен 0 или 1) тогда и только тогда, когда $x_i = G_i, i = 1,2,...,n$. Например, конъюнкция $\overline{x_1}\,\overline{x_2} x_3 x_4$ (в которой $G_2 = G_1 = 0$, $G_3 = G_4 = 1$) равна 1 только в случае, когда $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = x_4 = 1$.

**Теорема 1** *Всякая булева функция $f(x_1,x_2,...,x_n)$ может быть представлена в следующей форме:*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = V_{(G_1, G_2, ..., G_n)} x_1^{G1}, x_2^{G2}, ..., x_k^{Gk} f(G_1, G_2, ..., G_k, x_{k+1}, ..., x_n), \quad (3.1)$$

*где 1 ≤ k ≤ n, в дизъюнкции берется по всем наборам значений переменных.*

Это представление носит название разложения функции по переменным $x_1, x_2, ..., x_n$. Например, при n = 4, k = 2 разложение (3.1) имеет вид:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}\,\overline{x_2} f(0,0,x_3,x_4) \vee \overline{x_1} x_2 f(0,1,x_3,x_4) \vee x_1 \overline{x_2} f(1,0,x_3,x_4) \vee$$

$$\vee\, x_1 x_2 f(1,1,x_3,x_4).$$

Докажем справедливость разложения (3.1). Для этого возьмем произвольный набор значений переменных $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Покажем, что левая и правая части соотношения (3.1) принимают при нем одно и то же значение. Действительно, так как $x^G = 1$ тогда и только тогда, когда $x$ = G, то среди $2^K$ конъюнкции $x_1^{G1} x_2^{G2} ... x_k^{Gk}$ правой части (3.1) в единицу обращается только одна, в которой $\alpha_i = G_i, i = 1,2,...,k$. Все остальные конъюнкции $x_1^{G1} x_2^{G2} ... x_k^{Gk}$ равны нулю.

Поэтому $f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \alpha_1^{\alpha 1}, \alpha_2^{\alpha 2}, ..., \alpha_n^{\alpha n} f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. В качестве следствия из разложения (3.1) получаем следующие два специальных разложения.

**Разложение по переменной $x_n$:**

$$f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) = x_n f(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, 1) \vee \overline{x_n} f(x_1, ..., x_{n-1}, 0) \qquad (3.2)$$

Если булева функция не есть константа 0, то справедливо разложение

**Разложение по всем переменным:**

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = V_{(G1, G2, ..., Gn)} x_1^{G1} x_2^{G2} ... x_n^{Gn},\ f(G_1, G_2, ..., G_n) = 1 \qquad (3.3)$$

где дизъюнкция берется по всем наборам $(G_1, G_2, ..., G_n)$, при которых значение функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ равно 1.

Разложение (3.3) называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой (сокращенная запись СДНФ) функции.

Разложение (3.3) дает способ построения СДНФ. Для этого в таблице истинности отмечаем все строки $(G_1, G_2, ..., G_n)$, в которых $f(G_1, G_2, ..., G_n) = 1$. Для каждой такой строки образуем конъюнкцию $x_1^{G1} x_2^{G2} ... x_n^{Gn}$ и затем все полученные конъюнкции соединяем знаком дизъюнкции.

Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между таблицей истинности функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и ее СДНФ. А это значит, что СДНФ для булевой функции единственна.

Единая булева функция, не имеющая СДНФ, есть константа 0.

**Пример 1** Найти совершенную дизъюнктивную форму для функции $(x \Rightarrow \overline{y}) \Rightarrow z$.

Составим таблицу истинности для данной функции:

| $x$ | $y$ | $z$ | $\overline{y}$ | $x \Rightarrow \overline{y}$ | $(x \Rightarrow \overline{y}) \Rightarrow z$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Отсюда получаем:

$$(x \Rightarrow \overline{y}) \Rightarrow z = x^0 y^0 z^1 \vee x^0 y^1 z^1 \vee x^1 y^0 z^1 \vee x^1 y^1 z^0 \vee x^1 y^1 z^1 =$$

$$= \overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z} \vee xyz .$$

Важную роль в алгебре логики играет следующее разложение булевых функций.

**Теорема 2** *Всякая булева функция* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *может быть представлена в следующей форме:*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \wedge_{(G1, G2, ..., Gk)} (x_1^{\overline{G1}} \vee x_2^{\overline{G2}} \vee ... \vee x_k^{\overline{Gk}} \vee f(G_1, ..., G_k, x_{k+1}, ..., x_n)) \quad (3.4)$$

где 1≤k≤n, а конъюнкция берется *по всем* $2^k$ *наборам значений переменных.*

Действительно, пусть $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ – произвольный набор значений переменных. Покажем, что левая и правая части соотношения (3.4) принимают при нем одно и то же значение. Так как $x_i^{G_i} = 0$ только тогда, когда $x_i = G_i$, то среди $2^k$ дизъюнкций $x_1^{\overline{G_1}} \vee ... \vee x_k^{Gk}$ правой части (3.4) в 0 обращается только одна, в которой $\alpha_i = G_i, i = 1,2,...,k$. Все остальные дизъюнкции равны 1.

Поэтому

$f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \alpha_1^{\overline{\alpha 1}} \vee \alpha_2^{\overline{\alpha 2}} \vee ... \vee \alpha_k^{\overline{\alpha k}} \vee f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$.

Непосредственно из разложения (3.4) следуют разложения булевых функций:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1 \vee f(0, x_2, ..., x_n))(\overline{x_1} \vee f(1, x_2, ..., x_n)) \qquad (3.5)$$

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \wedge_{(G1, G2, ..., Gn)}(x_1^{\overline{G1}} \vee x_2^{\overline{G2}} \vee ... \vee x_n^{\overline{Gn}}),\ f(G_1, G_2, ..., G_n) = 0 \quad (3.6)$$

Последнее разложение носит название совершенной конъюнктивной нормальной формы (СКНФ). Разложение (3.6) дает способ построения СКНФ. Для этого в таблице истинности отмечаем все строки $(G_1, ..., G_n)$, в которых $f(G_1, G_2, ..., G_n) = 0$. Для каждой такой строки образуем дизъюнкцию $x_1^{\overline{G1}} \vee x_2^{\overline{G2}} \vee ... \vee x_n^{\overline{Gn}}$ и затем все полученные конъюнкции соединяем знаком конъюнкции. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между таблицей истинности функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и ее СКНФ. А это значит, что СКНФ для булевой функции единственна.

Единственная булева функция, не имеющая СКНФ, есть константа 1.

**Пример 2** Найти совершенную конъюнктивную нормальную форму для функции $(x \Rightarrow y)(y \Rightarrow z)$.

Составим таблицу истинности для данной функции.

| $x$ | $y$ | $z$ | $x \Rightarrow y$ | $y \Rightarrow z$ | $(x \Rightarrow y)(y \Rightarrow z)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Отсюда получаем СКНФ

$$(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z).$$

Формула вида $Д = K_1 \vee K_2 \vee ... \vee K_t$ (краткая запись $V_{i=1}^{t} K_i$), где $K_i, i = 1,2,...,t$ – конъюнкции $x_{i1}^{G1} x_{i1}^{G2} ... x_{it}^{Gt} G_i \in \{0,1\}$ называется **дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ).**

В силу приведенного определения ДНФ будут, например, выражения: $xy\bar{z} \vee xz$, $\bar{x}\bar{y} \vee z$.

Как отмечено в пункте 2.2, все логические операции можно свести к трем: конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Причем, ввиду закона де Моргана, знак отрицания можно предполагать отнесенным только к переменным.

Теперь, используя дистрибутивный закон, раскрываем скобки и получаем дизъюнктивную нормальную форму. Итак, справедлива следующая теорема.

**Теорема 3** *Для любой формулы алгебры логики существует равносильная ей дизъюнктивная нормальная форма.*

Доказательство данной теоремы дает способ построения дизъюнктивной нормальной формы для любой формулы алгебры логики.

**Пример 3** Найти дизъюнктивную нормальную форму для следующей формулы: $(x \Rightarrow y)\overline{\overline{yz}} \vee \overline{uv}$.

Исключая знак $\Rightarrow$ по закону $x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y$ и применяя законы де Моргана и двойного отрицания, получаем:

$$(\bar{x} \vee y)(y \vee \bar{z}) \vee \bar{u} \vee \bar{v}$$

Затем, применяя закон дистрибутивности, раскроем скобки

$$\bar{x}y \vee \bar{x}\bar{z} \vee y \vee y\bar{z} \vee \bar{u} \vee \bar{v}$$

Последнее выражение есть дизъюнктивная нормальная форма.

Форма вида $K = Д_1 Д_2 ... Д_t$ (краткая запись $\overset{t}{\underset{i=1}{\wedge}} Д_i$), где $Д_i, i = 1,2,...,t$ - дизъюнкции $x_{i1}^{Gi} \vee x_{i2}^{G2} \vee ... \vee x_{ik}^{Gk}$ называется **конъюнктивной нормальной формой (КНФ).**

Такими являются, например, выражения:

$(x \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y)$, $(x \vee y)z$.

Как показано выше, для любой формулы алгебры логики существует равносильная ей дизъюнктивная форма. Используя дистрибутивный закон $x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$, из данной ДНФ легко получить КНФ.

Итак, справедлива следующая теорема.

**Теорема 4** *Для любой формулы алгебры логики существует равносильная ей конъюнктивная нормальная форма.*

Доказательство данной теоремы дает способ построения конъюнктивной нормальной формы для любой формулы алгебры логики.

**Пример 4** Найти дизъюнктивную и конъюнктивную нормальные формы для следующей формулы: $xy \Leftrightarrow z$.

Используя закон $x \Leftrightarrow y = \bar{x}\bar{y} \vee xy$, исключаем знак $\Leftrightarrow$. Получаем формулу $\overline{xyz} \vee xyz$.

Используя закон де Моргана, получаем формулу $(\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z} \vee xyz$. Раскрывая скобки, получаем дизъюнктивную нормальную форму

$\bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z} \vee xyz$.

Чтобы получить конъюнктивную нормальную форму, применим к формуле $(\bar{x} \vee \bar{y})\bar{z} \vee xyz$ дистрибутивный закон, получаем:

$$(\bar{z} \vee xyz)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee xyz) = (\bar{z} \vee x)(\bar{z} \vee y)(\bar{z} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee x)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee y)(x \vee \bar{y} \vee z).$$

Последнее выражение является конъюнктивной нормальной формой. Так как $x \vee \bar{x} = 1$ и $x \vee 1 = 1$, то полученная КНФ равносильна следующей КНФ:

$$(\bar z \vee x)(\bar z \vee y)(\bar x \vee \bar y \vee z).$$

Среди всех нормальных формул данной формулы выделим совершенную нормальную форму как дизъюнктивную, так и конъюнктивную. Учитывая разложение (3), нетрудно заметить, что совершенная дизъюнктивная нормальная форма формулы алгебры логики, содержащей ровно n различных переменных, есть ее дизъюнктивная нормальная форма, в которой:

1) все конъюнкции попарно различны;

2) каждая конъюнкция содержит ровно n переменных;

3) в каждой конъюнкции встречаются все n переменных.

На примере 1 мы рассмотрели один из способов построения СДНФ, основанный на составлении таблицы истинности. Следующий способ построения СДНФ основан на применении законов алгебры логики.

**Пример 5** Найти совершенную дизъюнктивную форму формулы $(x \Rightarrow y) \Rightarrow z$.

Используя, что $x \Rightarrow y = \bar x \vee y$, получаем $\overline{\bar x \vee y} \vee z$. Ввиду законов де Моргана и двойного отрицания имеем получили дизъюнктивную нормальную форму $x\bar y \vee z$. Данная ДНФ равносильна формуле $x\bar y(z \vee \underline{z}) \vee z(x \vee \bar x)(y \vee \bar y)$.

Раскрывая скобки, получаем: $x\bar y z \vee x\bar y\bar z \vee xyz \vee x\bar y z \vee \bar x yz \vee \bar x\bar y z$.

Используя закон идемпотентности, получаем требуемую СДНФ:
$x\bar y z \vee x\bar y\bar z \vee xyz \vee x\bar y z \vee \bar x yz \vee \bar x\bar y z$.

Учитывая разложение (3.6), нетрудно заметить, что совершенная конъюнктивная нормальная форма формулы алгебры логики, содержащей ровно *n* различных переменных, есть ее конъюнктивная нормальная форма, в которой:

1) все дизъюнкции попарно различны;

2) каждая дизъюнкция содержит ровно n членов;

3) в каждой дизъюнкции встречаются все n переменных.

На примере 2 мы рассмотрели один из способов построения СКНФ, основанный на составлении таблицы истинности. Следующий способ построения СКНФ основан на применении законов алгебры логики.

**Пример 6** Найти совершенную конъюнктивную нормальную форму формулы $(x \Rightarrow y)z$.

Используя, $x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y$, получаем $(\bar{x} \vee y)z$.

Данная формула является конъюнктивной нормальной формой. Она равносильна формуле $(\bar{x} \vee y \vee z\bar{z})(z \vee x\bar{x} \vee y\bar{y})$.

Используя закон дистрибутивности, получаем:

$$(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(z \vee x \vee y)(z \vee x \vee \bar{y})(z \vee \bar{x} \vee \bar{y})$$

Применяя закон идемпотентности, получаем требуемую совершенную конъюнктивную нормальную форму

$$(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z).$$

Формула алгебры логики называется **тождественно истинной**, если она при всех значениях входящих в нее переменных принимает значение истинно.

Примерами тождественно истинных формул являются формулы:

$$x \Rightarrow (y \Rightarrow x),\ x \vee \bar{x},\ x \vee y \vee 1$$

Формула алгебры логики называется **тождественно ложной**, если она при всех значениях, входящих в нее переменных, принимает значение ложь.

Примерами тождественно ложных формул являются формулы:

$x\bar{x}$, $(x \vee y)\bar{x}\bar{y}$

Формула алгебры логики называется **выполнимой**, если она при некоторых значениях, входящих в нее переменных, принимает значение истинно.

Примерами выполнимых формул являются следующие формулы:

$x \Rightarrow y$, $x \vee yz$.

В алгебре логики можно поставить следующую задачу: указать способ (алгоритм), позволяющий для каждой формулы алгебры логики выяснить, является она тождественно истинной или нет. Поставленная задача носит название **проблемы разрешения.**

Рассмотрим следующие два способа решения этой задачи.

**Способ 1 (табличный)** Для того, чтобы определить, является ли данная формула тождественно истинной или нет, достаточно составить ее таблицу истинности.

Однако данный способ, хотя и дает принципиальное решение проблемы разрешимости, он довольно громоздкий.

**Способ 2** основан на приведении формул к нормальной форме.

**Теорема 4** *Формула алгебры логики тогда и только тогда является тождественно истинной, когда каждая дизъюнкция в ее конъюнктивной нормальной форме содержит некоторую переменную вместе с ее отрицанием.*

Действительно, если каждая дизъюнкция в конъюнктивной нормальной форме содержит переменную вместе с ее отрицанием, то все дизъюнкции равны 1, ибо $x \vee \overline{x} = 1$, $x \vee 1 = 1$. Отсюда следует, что КНФ является тождественно истинной.

Пусть теперь данная формула является тождественно истинной, и пусть $x_1^{G1} \vee x_2^{G2} \vee ... \vee x_k^{Gk}$ есть некоторая дизъюнкция в КНФ данной формулы. Допустим, что данная дизъюнкция не содержит переменной вместе с ее отрицанием. В таком случае мы можем каждой переменной, не стоящей под знаком отрицания, дать значение 0, а каждой переменной, стоящей под знаком отрицания – значение 1. После указанной подстановки все дизъюнкции станут равны 0, следовательно, формула не является тождественно истинной. Получили противоречие.

**Пример 7** Выяснить, будет ли тождественно истинной формула
$x \Rightarrow (y \Rightarrow xy)$.

Используя, что $x \Rightarrow y = \overline{x} \vee y$, получаем $\overline{x} \vee \overline{y} \vee xy$.

Применяя закон дистрибутивности, получаем КНФ:
$(\overline{x} \vee \overline{y} \vee x)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee y)$. Так как каждая дизъюнкция содержит некоторую переменную вместе с ее отрицанием, то формула тождественно истинна.

Аналогично предыдущей теореме доказывается теорема:

**Теорема 5** *Формула алгебры логики тогда и только тогда является тождественно ложной, когда каждая конъюнкция в ее дизъюнктивной форме содержит некоторую переменную вместе с ее отрицанием.*

### 3.2 Алгебра Жегалкина.

*Множество булевых функций, рассматриваемое вместе с операциями конъюнкции и сложения (по модулю два), будем называть алгеброй Жегалкина.*

Непосредственно проверкой (с помощью таблиц истинности) устанавливаются следующие законы:

1) $x + y = y + x$ – закон коммутативности;

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ – закон ассоциативности;

3) $x(y + z) = xy + xz$ – закон дистрибутивности;

4) $x + x = 0$;

5) $x + 0 = x$.

В алгебре Жегалкина роль совершенных нормальных форм булевой алгебры играют полиномы Жегалкина.

**Полиномом Жегалкина** называется полином вида $\Sigma x_{i1}x_{i2}...x_{in} + a$

причем в каждом наборе $(i_1, i_2, ..., i_k)$ все координаты различны, а суммирование ведется по некоторому множеству таких не совпадающих наборов, $a$ – константа 0 или 1.

Например, выражение $xy + x + y + 1$ является полиномом Жегалкина, а выражения $yy + y + z$ и $xy + z + xy$ – нет, так как в первом выражении имеется конъюнкция, содержащая две переменные у, а второе выражение содержит два одинаковых слагаемых $xy$ и $yx$.

Если в произвольной форме алгебры Жегалкина раскрыть скобки и произвести все возможные упрощения по указанным выше законам и закону идемпотентности, то получится формула, являющаяся полиномом Жегалкина.

Рассмотрим теперь взаимосвязь, существующую между операциями булевой алгебры и алгебры Жегалкина. Непосредственной проверкой устанавливается

$$\begin{aligned} &\bar{x} = x + 1 \\ &x \vee y = xy + x + y \\ &x + y = \bar{x}y \vee x\bar{y} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Ранее мы показали, что любая булева функция может быть выражена в виде формулы через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию. Согласно законам (3.7) получаем, что любая булева функция может быть выражена в виде формулы алгебры Жегалкина. Следовательно, существование полинома Жегалкина доказано для любой булевой функции.

Число различных слагаемых (конъюнкций) полинома Жегалкина от n переменных равно числу всех подмножеств из n элементов, т.е. $2^n$. Число различных полиномов, которые можно образовать из этих конъюнкций, равно числу всех подмножеств множества данных конъюнкций, т.е. $2^{2^n}$. Следовательно, число всех полиномов Жегалкина от n переменных равно числу всех булевых функций от n переменных. Отсюда следует единственное представление булевой функции посредством полинома Жегалкина. Итак, справедлива следующая теорема.

**Теорема 6** *Каждая булева функция может быть единственным образом выражена при помощи полинома Жегалкина.*

**Пример 8** Выразить $x \Rightarrow y$ в виде полинома Жегалкина.

**Способ 1 (табличный)** Ищем требуемый полином методом неопределенных коэффициентов: $x \Rightarrow y = axy + bx + cy + d$ .

1) при $x$ = y = 0 имеем: d = 1;

2) при $x$ = 0, y = 1 имеем: a = 0;

3) при $x$ = 1, y = 0 имеем: b = 1;

4) при $x$ = 1, y = 0 имеем: 1 = a + b + c + d = a + 1 + 0 + 1 = a, т.е. a = 1.

Отсюда $x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y = \overline{x\bar{y}} = \overline{x(y+1)} = x(y+1)+1 = xy + x + 1$

**Способ 2** $x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y = \overline{x\bar{y}} = \overline{x(y+1)} = x(y+1)+1 = xy + x + 1$

**Вопросы для самоконтроля**

1 Сформулируйте теорему о разложении и следствие из нее.

2 Дайте определение СДНФ.

3 Приведите алгоритмы построения СДНФ.

4 Дайте определение СКНФ.

5 Приведите алгоритмы построения СКНФ.

6 Дайте определение ДНФ.

7 Как найти ДНФ?

8 Дайте определение КНФ.

9 Как найти КНФ?

10 Какая формула алгебры логики называется тождественно истинной?

11 Какая формула алгебры логики называется тождественно ложной?

12 Какая формула алгебры логики называется выполнимой?

13 Что называется проблемой разрешимости?

14 Сформулируйте методы решения проблемы разрешения.

15 Что называется алгеброй Жегалкина?

16 Сформулируйте законы алгебры Жегалкина.

17 Что называется полиномом Жегалкина?

18 Сформулируйте алгоритмы построения полиномов Жегалкина.

## ТЕМА 4 ПОЛНОТА И ЗАМКНУТОСТЬ

4.1 Важнейшие замкнутые классы

4.2 Теорема о полноте

Ранее мы показали, что всякая булева функция с помощью операций суперпозиции может быть выражена через элементарные функции $\{x \vee y, xy, \bar{x}\}$. Поэтому для любой системы булевых функций Д возникает естественный вопрос: для всякой ли булевой функции существует равносильная ей суперпозиция функций из Д?

### 4.1 Важнейшие замкнутые классы.

Система булевых функций $Д = \{f_1, f_2, ..., f_r\}$ называется **полной**, если любую булеву функцию можно представить в виде суперпозиции функций из Д.

Приведем пример полных систем.

**Пример 1** Как отмечено выше, система $Д = \{\bar{x}, xy, x \vee y\}$ является полной.

**Пример 2** Множество всех булевых функций $P_2$ является полной системой.

В вопросе о полноте важную роль играет следующая теорема.

*Пусть* $Д_1 = \{f_1, f_2, ..., f_r, ...\}$ *и* $Д_2 = \{g_1, g_2, ..., g_k, ...\}$ *системы булевых функций. Если* $Д_1$ *– полная система и каждая ее функция выражается в виде суперпозиции функций из* $Д_2$*, то система* $Д_2$ *также является полной.*

Действительно, так как $Д_1$ – полная система, то любая булева функция представима в виде суперпозиции функций из $Д_1$. А так как любая функция из $Д_1$ представима в виде суперпозиций функций из $Д_2$, то $Д_2$ – полная система.

**Пример 3** Система $\{\bar{x}, x \vee y\}$ – полная.

Это следует из предыдущей теоремы и из примера 1, ибо $xy = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$. Аналогичным образом получаем полноту системы $\{\overline{x}, xy\}$. Приведенные примеры говорят о том, что существуют различные полные системы булевых функций. Каждая из таких систем может быть принята в качестве набора «элементарных» функций, и любая булева функция может быть выражена в виде суперпозиции через «элементарные» функции принятого набора.

С понятием полноты тесно связано понятие замкнутого класса и замыкания.

Множество Т булевых функций называется **замкнутым классом**, если любая суперпозиция функций из Т снова принадлежит Т.

Всякая система М булевых функций порождает некоторый замкнутый класс. Этот класс состоит из всех булевых функций, которые можно получить суперпозициями из М. Такой класс называется **замыканием** М и обозначается [М]. Для замкнутого класса М следует, что [М] = М. Очевидно, что если М – полная система, что [М] = $P_2$.

При установлении необходимого и достаточного условия полноты важную роль играют пять замечательных классов булевых функций, которые будут рассмотрены ниже.

**Первый замечательный класс** – класс булевых функций, сохраняющих константу С, т.е. функций $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, для которых $f(0,0,...,0) = 0$.

Подсчитаем число таких булевых функций от n переменных. Поскольку на нулевом наборе значение функций из $T_0$ фиксировано, то в $T_0$ содержится ровно $\frac{1}{2}2^{2^n}$ булевых функций от n переменных.

Ясно, что функции $x, xy, x \vee y$ принадлежат классу $T_0$, а $\overline{x}$ не принадлежит $T_0$. Следовательно, $T_0 \subset P_2$.

**Второй замечательный класс** – класс булевых функций, сохраняющих константу 1, т.е. функций $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, для которых $f(1,1,...,1) = 1$.

Как и выше, легко подсчитать число таких функций от переменных. Их ровно $\frac{1}{2}2^{2^n}$.

Ясно, что функции $x, xy, x \vee y$ принадлежат классу T$_1$, а функция $x + y$ – нет. Следовательно, $T_1 \subset P_2$.

**Третий замечательных класс** – класс всех самодвойственных функций S.

Булева функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется **самодвойственной**, если она совпадает со своей двойственной, т.е. $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})$.

**Пример 4** Доказать, что функция $xy \vee yz \vee xz$ является самодвойственной.

Двойственная для данной функции есть функция $\overline{\overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{z}}$. Теперь, применяя закон де Моргана, получаем:

$$\overline{\overline{x}\,\overline{y}} \cdot \overline{\overline{y}\,\overline{z}} \cdot \overline{\overline{x}\,\overline{z}} = (\overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}})(\overline{\overline{y}} \vee \overline{\overline{z}})(\overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{z}}) \cdot (x \vee y)(y \vee z)(x \vee z)$$

Используя законы дистрибутивности и идемпотентности, имеем:

$$(y \vee xz)(x \vee z) = xy \vee yz \vee xz$$

Следовательно, искомая функция самодвойственна.

Очевидно, что $x$ и $\overline{x}$ принадлежат классу S, а $xy$, $x \vee y$ не принадлежат классу S. Следовательно, $S \subset P_2$.

Подсчитаем число всех самодвойственных функций от *n* переменных.

Так как самодвойственная функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ на наборах $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ и $(\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, ..., \overline{\alpha_n})$ принимает противоположные значения, то она полностью определяется своими значениями, принимаемыми ею на половине всех наборов переменных. Следовательно, число самодвойственных функций от переменных равно $2^{\frac{1}{2} \cdot 2^n} = \sqrt{2^{2^n}}$.

**Четвертый замечательный класс** – класс всех линейных булевых функций.

Булевы функции вида $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0$, где $a_i$ и $a_0$ равны нулю или единице, называют **линейными.**

Нетрудно подсчитать число всех линейных булевых функций от переменных. Их число равно $2^{n+1}$.

Очевидно, что функции $x, x+y$ принадлежат L, а функция $xy$ не принадлежит L. Следовательно $L \subset P_2$.

Для того, чтобы определить, является данная булева функция линейной или нет, ее надо представить в виде полинома Жегалкина.

**Пример 5** Выяснить, является ли функция $x \vee y$ линейной. Запишем данную функцию в виде полинома Жегалкина:

$$x \vee y = \overline{\overline{x}\,\overline{y}} = \overline{(x+1)(y+1)} = (x+1)(y+1)+1 = xy + x + y + 1 + 1 = xy + x + y.$$

Следовательно, функция $x \vee y$ не является линейной.

**Пятый замечательный класс** – класс M всех монотонных булевых функций.

Два набора $\widetilde{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ и $\widetilde{b} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ называются **сравнимыми**, если $\alpha_i \preceq \beta_i, i = 1,2,...,n$.

Запись $\widetilde{a} \preceq \widetilde{b}$ означает, что набор $\widetilde{a}$ предшествует набору $\widetilde{b}$. Например, $(0,1,1) \preceq (0,1,1)$, а наборы $(0,1,0)$ и $(1,0,0)$ несравнимы.

Булева функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется **монотонной**, если для любых наборов $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ таких, что $\widetilde{a} \preceq \widetilde{b}$, имеет место неравенство $f(\widetilde{a}) \preceq f(\widetilde{b})$.

Очевидно, что константы 0,1 и функция $x$ – монотонные функции.

Функции $\overline{x} \Rightarrow y, \overline{\overline{x}}$ – монотонные функции (доказательство осуществляяется проверкой).

Функции $x \Rightarrow y, \overline{x}$ не являются монотонными, так как $(0,0) \preceq (1,0)$, а $1 = 0 \Rightarrow 0 > 1 \Rightarrow 0 = 0, (0) \preceq (1), \overline{0} > \overline{1}$.

Следовательно, $M \subset P_2$.

Для распознавания монотонности функции полезной является следующая теорема.

**Теорема 1** *Булева функция, имеющая дизъюнктивную нормальную форму, не содержащую отрицаний, является монотонной функцией, отличной от 0 и 1.*

Докажем данную теорему. Пусть булева функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет дизъюнктивную нормальную форму Д, не содержащую отрицаний, и пусть на наборе $\widetilde{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $Д(\widetilde{a}) = 1$. Тогда Д содержит конъюнкцию $X_{i1} X_{i2} ... X_{ik}$ равную единице на наборе $\widetilde{a}$. Следовательно, $\alpha_{i1} = \alpha_{i2} = ... = \alpha_{ik} = 1$. Возьмем любой набор $\widetilde{b}$ такой, что $\widetilde{a} \le \widetilde{b}$. В нем обязательно $\beta_{i1} = \beta_{i2} = ... = \beta_{ik} = 1$. Поэтому конъюнкция $X_{i1} X_{i2} ... X_{ik}$ при этом наборе равна 1, а значит $Д(\widetilde{b}) = 1$. Итак, условие монотонности для ДНФ Д выполнено. А это значит, что функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ монотонна.

Используя данную теорему, сразу получаем, что функции $xy \vee yz \vee xz$, $xy \vee z$ являются монотонными.

**Классы булевых функций $T_0, T_1, S, M, L$ являются замкнутыми классами.**

Докажем, что $T_0$ – замкнутый класс. Для этого надо показать, что функция $\Phi = f(f_1, f_2, ..., f_k)$ принадлежит $T_0$, если функция $f$, $f_1, f_2, ..., f_k$ принадлежит $T_0$. Это следует из следующей цепочки неравенств:

$$\Phi(0,0,...,0) = f(f_1(0,...,0),..., f_n(0,...,0)) = f(0,0,...,0) = 0.$$

Аналогичным образом доказывается замкнутость класса $T_1$.

Если $\Phi = f(f_1, f_2,..., f_n), f_1, f_2,..., f_k$ самодвойственные функции, то $\Phi^* = f^*(f_1^*, f_2^*,..., f_n^*) = f(f_1, f_2,..., f_n) = \Phi$. Итак, S – замкнутый класс.

Пусть $\Phi = f(f_1, f_2,..., f_n)$, где $f, f_1, f_2,..., f_n$ – монотонные функции, и пусть $\widetilde{x} = (x_1,..., x_n), \widetilde{x}' = (x_{1_1},..., x_{1_n}),..., \widetilde{x}^k = (x_{k1},..., x_{kn})$ их наборы переменных. Здесь переменные функции Ф состоят из функций $f_1, f_2,..., f_k$. Пусть $\widetilde{a} = (a_1, a_2,..., a_n)$ и $\widetilde{b} = (b_1, b_2,..., b_n)$ два таких набора, что $\widetilde{a} \preceq \widetilde{b}$. Каждый из наборов $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ однозначно определяет следующие наборы $\widetilde{a}^1, \widetilde{b}^1,..., \widetilde{a}^k, \widetilde{b}^k$ значений переменных $\widetilde{x}^1,..., \widetilde{x}^k$. Причем $\widetilde{a}^1 \preceq \widetilde{b}^1,..., \widetilde{a}^k \preceq \widetilde{b}^k$. Так как $f_1,..., f_n$ – монотонные функции, то $f_i(\widetilde{a}^i) \preceq f_i(\widetilde{b}^i)$. Следовательно, $(f_1(\widetilde{a}^1),..., f_k(\widetilde{a}^k)) \preceq (f_1(\widetilde{b}^1),..., f_n(\widetilde{b}^n))$. Из монотонности функции *f* получаем, что $\hat{O}(\widetilde{a}) = f(f(\widetilde{a}^1),..., f_k(\widetilde{a}^k)) \preceq f(f_1(\widetilde{b}^1),..., f_k(\widetilde{b}^k)) = \hat{O}(\widetilde{b})$.

Итак, M – замкнутый класс.

Замкнутость класса L следует непосредственно из определения линейных функций.

Как показано выше, функция $\overline{x}$ не принадлежит классу M. Следующая теорема показывает, что всякая немонотонная функция содержит, в некотором смысле, в своем составе функцию отрицания.

**Теорема 2** *Если $f(x_1, x_2,..., x_n)$ – немонотонная функция, то в результате ее суперпозиции с константами 0 и 1 может быть получена функция отрицания $x_i$ одного из аргументов функции $f(x_1, x_2,..., x_n)$.*

Докажем данную теорему. Так как функция $f(x_1, x_2,..., x_n)$ немонотонная, то найдутся два набора $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ значений переменных таких, что $\widetilde{a} \preceq \widetilde{b}$, и $f(\widetilde{a}) > f(\widetilde{b})$. Причем, в качестве этих наборов $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ можно выбрать соседние наборы, т.е. наборы, отличающиеся значениями только по одной из координат. Действительно, если $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ не являются соседними наборами, то набор $\widetilde{b}$ отличается от набора $\widetilde{a}$ в t координатах, где t > 1. Причем, эти координаты в наборе $\widetilde{a}$ равны 0, а в наборе $\widetilde{b}$ равны 1. Из этого следует, что между наборами $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ можно вставить t – 1 наборов $\widetilde{a}^1,...,\widetilde{a}^{t-1}$, таких, что

$$\widetilde{a} \le \widetilde{a}^1 \le ... \le \widetilde{a}^{t-1} \le \widetilde{b}. \qquad (4.1)$$

Так как $f(\widetilde{a}) > f(\widetilde{b})$, то обязательно найдется такая пара соседних наборов из цепочки (4.1) $\widetilde{a}^i$ и $\widetilde{a}^{i+1}$, что $f(\widetilde{a}^i) > f(\widetilde{a}^{i+1})$. Не ограничивая общности, мы можем считать, что $\widetilde{a} = (a_1,...,a_{i-1},0,a_{i+1},...,a_n)$;

$$\widetilde{b} = (a_1,...,a_{i-1},0,a_{i+1},...,a_n).$$

Подставим в функцию $f(x_1,x_2,...,x_n)$ вместо переменной $x_j$ константу $a_i$, где $j = 1,2,...,i-1,i+1,...,n$. В результате мы получим функцию от одной переменной:

$$g(x_i) = f(a_1,...,a_{i-1},0,a_{i+1},...,a_n) = f(\widetilde{a}) > f(\widetilde{b}) = f(a_1,...,a_{i-1},1,a_{i+1},...,a_n) = g(1)$$

А это значит, что $g(0) = 1, g(1) = 0$. Следовательно, $g(x_i) = \overline{x_i}$.

**4.2 Теорема о полноте.**

Цель данного параграфа дать ответ на один из основных вопросов алгебры логики – вопрос о необходимом и достаточном условиях полноты системы булевых функций. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема, доказательство которой будет вестись по методу А. В. Кузнецова и С. К. Яблонского.

**Теорема 3 (о полноте)** *Для того, чтобы система булевых функций Д была полной, необходимо и достаточно, чтобы она целиком не содержалась ни в одном из пяти замкнутых классов $T_0$, $T_1$, S, M, L.*

***Доказательство.*** Необходимость. Пусть Д – полная система, целиком содержащаяся в одном из классов $T_0$, $T_1$, S, M, L. Не ограничивая общности, будем считать, что $Д \subseteq T_0$. Тогда $P_2 = [Д] \subseteq [T_0] = T_0$. Следовательно, $T_0 = P_2$, что невозможно.

*<u>Достаточность.</u>* Пусть система булевых функций Д целиком не содержится ни в одном из классов $T_0$, $T_1$, S, M, L. Тогда в системе Д обязательно найдутся следующие функции: $f_1$, не сохраняющая 0; $f_2$, не сохраняющая 1; не самодвойственная функция $f_3$; нелинейная функция $f_4$; не монотонная функция $f_5$. Учитывая понятие фиктивной переменной, мы можем считать, что эти функции зависят от одних и тех же переменных.

Вначале построим из системы функций Д константы 0 и 1.

Рассмотрим функцию $g(x_1) = f(x_1, x_1, ..., x_1)$. Эта функция есть суперпозиция функций $f_1$ и $x_1$. Так как $f_1$ не принадлежит классу $T_0$, $g(0) = f(0,0,...,0) = 1$. Если теперь g(1) = 1, то $g(x_1)$ - константа 1. Подставляя константу 1 в функцию $f_2$, мы получаем константу 0, ибо $f_2(1,1,...,1) = 0$.

Пусть теперь $g(1) = 0$. Из равенства g(0) = 1 и g(1) = 0 заключаем, что $g(x_i) = \overline{x_i}$. Возьмем несамодвойственную функцию $f_3$. Очевидно, что в этом случае найдется такой набор переменных $(a_1, a_2, ..., a_n)$, что $f_3(a_1, a_2, ..., a_n) = f_3(\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_n})$.

Рассмотрим функцию $\varphi_i(x) = x^{ai}, i = 1, 2, ..., n$ и построим с помощью операции суперпозиции функцию $h(x) = f(\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x))$. Тогда получаем:

$$\begin{aligned} h(0) &= f(\varphi_1(0), ..., \varphi_n(0)) = f(0^{a1}, ..., 0^{an}) = f(\overline{a_1}, ..., \overline{a_n}) \\ &= f(a_1, ..., a_n) = f(1^{a1}, ..., 1^{an}) = h(1) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Итак, h(0)=h(1). А это значит, что h($x$) есть константа 0 или 1. Так как мы построили функцию $g(x_i) = \overline{x_i}$, то суперпозиция этой функции с одной из констант дает другую константу. Следовательно, константы 0 и 1 нами построены.

Теперь, используя предыдущую теорему, мы можем с помощью суперпозиции функции $f_5$ и констант 0,1 построить функцию $\overline{x_i}$, а следовательно и все функции $\overline{x_1},...,\overline{x_n}$. Ранее мы показали, что любая булева функция $f(x_1,...,x_n)$ может быть представлена в виде суперпозиции уже построенных функций и функций $x_i x_2$. Следовательно, для завершения доказательства теоремы нам осталось построить функцию $x_1 x_2$. Для этого возьмем функцию $f_4$ и построим для этой функции полином Жегалкина. Так как эта функция нелинейная, то в этом полиноме найдется слагаемое, содержащее не менее двух множителей. Без ограничения общности можно считать, что этими множителями являются $x_1$ и $x_2$. Тогда мы можем записать полином Жегалкина для функции $f_4$ в следующем виде:

$$f_4(x_1,x_2,...,x_n) = x_1x_2h(x_3,...,x_n) + x_1h_2(x_3,...,x_n) + x_2h_3(x_3,...,x_n) + h_4(x_3,...,x_n)$$

В силу единственности полинома, функция $h_1(x_1,...,x_n)$ не равна тождественно нулю. Выберем такие значения переменных $a_3,a_4,...,a_n$, что $h(a_3,...,a_n)=1$. Ввиду этого, мы приходим к функции

$$\varphi(x_1,x_2) = x_1x_2 + \alpha x_1 + \beta x_2 + j,$$

где $\alpha,\beta,j$ константы 0 или 1. Построим функцию $\varphi(x_1,x_2)$ следующим образом:

$$\varphi(x_1,x_2) = \varphi(x_1+\beta, x_2+\alpha) + \alpha\beta + j =$$

$$= (x_1+\beta)(x_2+\beta) + \alpha(x_1+\beta) + \beta(x_2+\alpha) + j + \alpha\beta + j = x_1x_2.$$

Итак, теорема о полноте полностью доказана.

В тех задачах, где требуется выяснить, является ли данная система булевых функций $Д = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ полной, мы будем составлять таблицы, которые называются таблицами Поста. Данные таблицы имеют следующий вид.

| | $T_0$ | $T_1$ | S | L | M |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | | | | | |
| $f_2$ | | | | | |
| … | … | … | … | … | … |
| $f_{n-1}$ | | | | | |
| $f_n$ | | | | | |

В клетках данной таблицы мы будем писать плюс или минус, в зависимости от того, входит функция, стоящая в данной строке в класс, стоящий в данном столбце, или не входит. Используя теорему о полноте, мы получаем, что для полноты данной системы булевых функций необходимо и достаточно, чтобы в каждом столбце стоял хотя бы один минус.

**Пример 6** Выяснить, являются ли следующие системы булевых функций полными.

$$Д_1 = \{x \mid y\},\ Д_2 = \{x + y + z, xy, 0, 1\};$$
$$Д_3 = \{x \Rightarrow y, \overline{x}y\},\ Д_4 = \{\overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{x}\,\overline{z} \vee \overline{y}\,\overline{z}\}.$$

Составим таблицу Поста для системы $Д_1$:

| | $T_0$ | $T_1$ | S | L | M |
|---|---|---|---|---|---|
| $x \mid y$ | - | - | - | - | - |

Нетрудно заметить, что $x \mid y = \overline{x} \vee \overline{y}$.

Ясно, что $\overline{x} \vee \overline{y}$ не принадлежит $T_0$ и $T_1$. Двойственная функция к функции $\overline{x} \vee \overline{y}$ имеет вид: $\overline{\overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}}} = \overline{x} \cdot \overline{y}$.

Следовательно, $\overline{x} \vee \overline{y}$ не принадлежит классу S. Найдем полином Жегалкина для функции $\overline{x} \vee \overline{y}$: $\overline{x} \vee \overline{y} = \overline{xy} = xy + 1$.

Следовательно, функция $\overline{x} \vee \overline{y}$ не принадлежит классу L. Так как $(0,0) \le (1,1)$, а $\overline{0} \vee \overline{0} > T \vee \overline{1}$, то $\overline{x} \vee \overline{y}$ не принадлежит классу M.

Итак, система $Д_1 = \{x \mid y\}$ является полной.

Составим таблицу Поста для системы $Д_2$:

| | $T_0$ | $T_1$ | S | L | M |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+y+z$ | + | + | + | + | – |
| $xy$ | + | + | – | – | + |
| 0 | + | – | – | + | + |
| 1 | – | + | – | + | + |

Исследуем функцию $x+y+z$. Легко проверить, что она принадлежит классам $T_1$, $T_0$, L. Покажем, что она является самодвойственной.

$\overline{\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}} = x+1+y+1+z+1+1 = x+y+z$.

Функция $x+y+z$ не монотонна, так как $(1,0,0) \le (1,1,0)$, а $1+0+0 > 1+1+0$. В каждом столбце таблица Поста для системы Д$_2$ стоит минус. Следовательно, система Д$_2$ является полной.

Составим таблицу Поста для системы Д$_3$:

| | $T_0$ | $T_1$ | S | L | M |
|---|---|---|---|---|---|
| $x \Rightarrow y$ | – | + | – | – | – |
| $\overline{x}$ | – | – | + | + | – |

Из таблицы видно, что система Д$_3$ является полной.

Составим таблицу Поста для системы Д$_4$:

| | $T_0$ | $T_1$ | S | L | M |
|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{x}\overline{y} \vee \overline{x}\overline{z} \vee \overline{y}\overline{z}$ | - | - | + | - | - |

Исследуем функцию $\overline{x}\overline{y} \vee \overline{x}\overline{z} \vee \overline{y}\overline{z}$.

Легко проверить, что данная функция не принадлежит ни $T_0$, ни $T_1$. Так как $(0,0,0) \le (1,1,1)$, а значение функции при наборе (0,0,0) больше, чем при наборе (1,1,1), то функция $\overline{x}\overline{y} \vee \overline{x}\overline{z} \vee \overline{y}\overline{z}$ не монотонна. Очевидно, что все переменные данной функции являются существенными. А так как данная функция не может совпадать ни с $x+y+z$, ни с $x+y+z+1$, то она нелинейная. Как и в примере 6, можно показать, что функция $\overline{x}\overline{y} \vee \overline{x}\overline{z} \vee \overline{y}\overline{z}$ является самодвойственной. Следовательно, система Д$_4$ не является полной.

Назовем систему булевых функций **несократимой**, если из нее нельзя исключить ни одной функции так, чтобы оставшаяся после исключения система снова была полной.

Очевидно, что любую полную систему булевых функций можно свести к несократимой. Как следует из теоремы о полноте, в любой несократимой полной системе содержится не более 5 функций. Следующая теорема показывает, что в действительности их число всегда может быть сокращено до 4.

**Теорема 4** *Максимальное возможное число функций в несократимой полной системе булевых функций равно 4.*

Действительно, при доказательстве теоремы о полноте мы видели, что из любой полной системы булевых функций можно выделить полную подсистему, содержащую не более пяти функций. Причем, функция $f_1$, не сохраняющая 0, либо не сохраняет 1, либо если $f(1,1,...,1)=1$ является самодвойственной. Следовательно, кроме этой функции достаточно оставить в системе лишь три функции: нелинейную, немонотонную либо функцию, не сохраняющую 1, либо несамодвойственную функцию.

Следующий пример показывает, что константа 4 не может быть понижена.

**Пример 7** Рассмотрим систему функций $Д = \{x_1, x_2, 0, 1, x_1 + x_2 + x_3\}$.

Составим таблицу Поста для данной системы:

| | $T_0$ | $T_1$ | S | L | M |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1 x_2$ | + | + | – | – | + |
| 0 | + | – | – | + | + |
| 1 | – | + | – | + | + |
| $x_1 + x_2 + x_3$ | + | + | + | + | – |

Из таблицы видно, что данная система является полной и несократимой, ибо

$\{0,1,x_1 + x_2 + x_3\} \subset L$; $\{x_1 x_2, 1, x_1 + x_2 + x\ \} \subset T_1$; $\{x_1 x_2, 0, x_1 + x_2 + x_2\} \subset T_0$;
$\{x_1 x_2, 0, 1\} \subset M$

**Вопросы для самоконтроля**

1 Какая система булевых функций называется полной?

2 Что называется замыканием множества булевых функций?

3 Какой класс булевых функций называется замкнутым?

4 Дайте определение пяти важнейших замкнутых классов.

5 Сформулируйте теорему о полноте.

6 Сформулируйте алгоритм Поста.

7 Какая система булевых функций называется несократимой?

8 Каково максимальное возможное число функций в несократимой полной системе булевых функций?

## ТЕМА 5 КОНТАКТНЫЕ И ЛОГИЧЕСКИЕ СХЕМЫ

5.1 Анализ и синтез контактных схем.

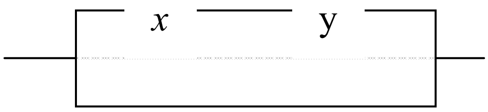
5.2 Логические элементы элементарных булевых функций.

5.3 Двоичный сумматор.

### 5.1 Анализ и синтез контактных схем.

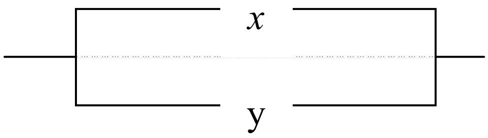
В начале прошлого века известный физик П. Эренфест впервые указал на возможность применения аппарата алгебры логики в технике. Эта идея нашла свое воплощение в работах советского физика В. И. Шестакова, американского математика К. Шеннона и японского инженера А. Какасима. Первыми объектами применения алгебры логики для решения технических задач были контактные схемы. Под контактными схемами мы будем понимать электрические цепи, содержащие только контакты. Каждый контакт может находиться в двух состояниях – разомкнут (0) и замкнут (1). Такие цепи мы будем изображать диаграммой, на которой возле контактов пишется $x_i$ или $\overline{x_i}$. Причем значение 1 этих переменных соответствует прохождению через данный контакт, а значения 0 нет.

Если контакты $x$ и у соединены последовательно, то цепь замкнута, когда оба контакта замкнуты и разомкнута, когда хотя бы один из контактов разомкнут. Ясно, что такой схеме




соответствует булева функция $xy$.

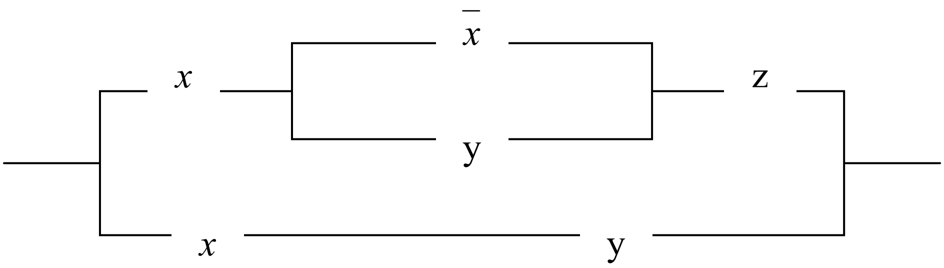
Если контакты $x$ и у соединены параллельно, то цепь замкнута, когда хотя бы один контакт замкнут и разомкнута, когда оба контакта разомкнуты. Ясно, что такой схеме




соответствует булева функция $x \vee y$.

Указанное соответствие позволяет любую булеву функцию представить в виде контактной схемы. С другой стороны, любая контактная схема с последовательно или параллельно соединенными контактами реализуется булевой функцией. Задача анализа контактной схемы и состоит в построении соответствующей ей булевой функции.

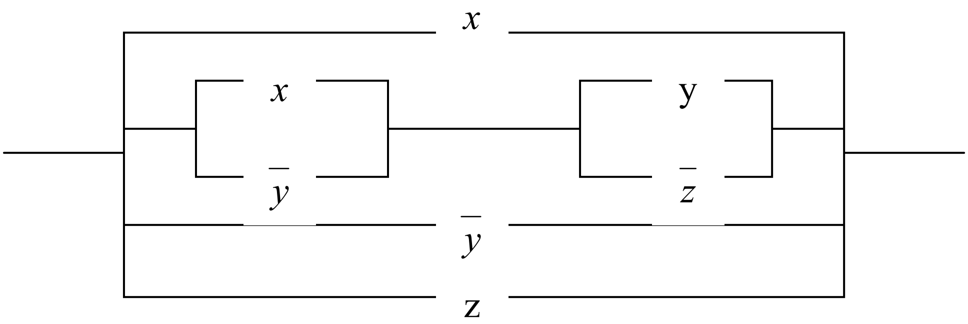
Например, контактная схема




реализуется булевой функцией $x(\bar{x} \vee y)z \vee xy$.

Однако, поскольку одна и та же булева функция может быть выражена различными формулами, то ее реализация контактными схемами неоднозначна. Всегда можно построить много различных контактных схем, соответствующих данной функции. Такие схемы называют эквивалентными. Задача синтеза контактной схемы состоит в построении контактной схемы по заданной булевой функции, которая может быть задана как формулой, так и таблицей. В обоих случаях необходимо выразить функцию через операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Каждая операция конъюнкции соответствует последовательному соединению контактов. В результате параллельного соединения получаем контактную схему. Из множества эквивалентных схем, путем упрощения формул выделяют наиболее простую схему. Центральной проблемой синтеза контактных схем является построение для данной булевой функции более простой схемы. Часто эта проблема сводится к минимизации булевых функций, т.е. к такому их представлению, в котором соответствующие формулы содержат минимальное количество вхождений переменных.

Рассмотрим схему



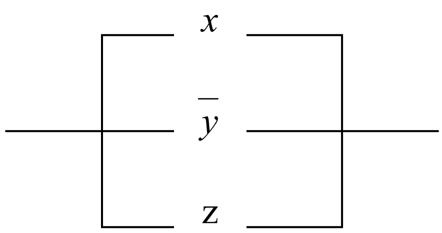

Данная схема реализуется следующей формулой:

$$x \vee (x \vee \bar{y})(y \vee \bar{z}) \vee \bar{y} \vee z$$

Упростим данную формулу. Используя закон дистрибутивности, получаем:

$$x \vee xy \vee x\bar{z} \vee y\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{y} \vee z = x(1 \vee y \vee \bar{z}) \vee \bar{y}(y \vee \bar{y} \vee 1) \vee z = x \vee \bar{y} \vee z$$

Следовательно, данную схему можно упростить, заменив ее следующей эквивалентной схемой:




Решим теперь следующую задачу: из контактов $x, y, z$ составить по возможности более простую схему так, чтобы она замкнулась тогда и только тогда, когда замкнуты не менее двух контактов.

Составим таблицу истинности для булевой функции, соответствующей требуемой контактной схеме

| $X$ | $y$ | $z$ | $f(x,y,z)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

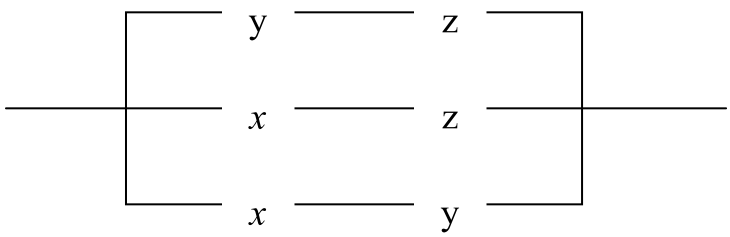
Найдем для данной булевой функции совершенную ДНФ:

$$f(x,y,z)=\bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz\,.$$

Упростим данную формулу

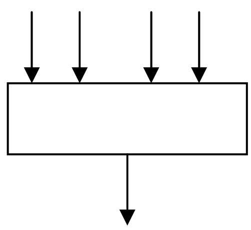
$$\bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee xyz = yz(\bar{x} \vee x) \vee xz(\bar{y} \vee y) \vee xy(\bar{z} \vee z) = yz \vee xz \vee xy\,.$$

Данной формуле соответствует следующая контактная схема:




Контактные схемы исторически были первыми техническими средствами реализации булевых функций. В дальнейшем появилось много различных устройств, реализующих булевы функции одной и нескольких переменных.

Пусть имеется некоторое устройство, имеющее n упорядоченных «входов» и один «выход», причем внутренняя структура этого устройства нас не интересует. На каждый из входов могут подаваться два сигнала, которые мы будем обозначать символами 0 и 1. При каждом наборе сигналов на входах и выходе возникает один из сигналов 0 или 1. Причем набор сигналов на входах однозначно определяет сигнал на выходе. Очевидно, что каждое такое устройство реализует булеву функцию.



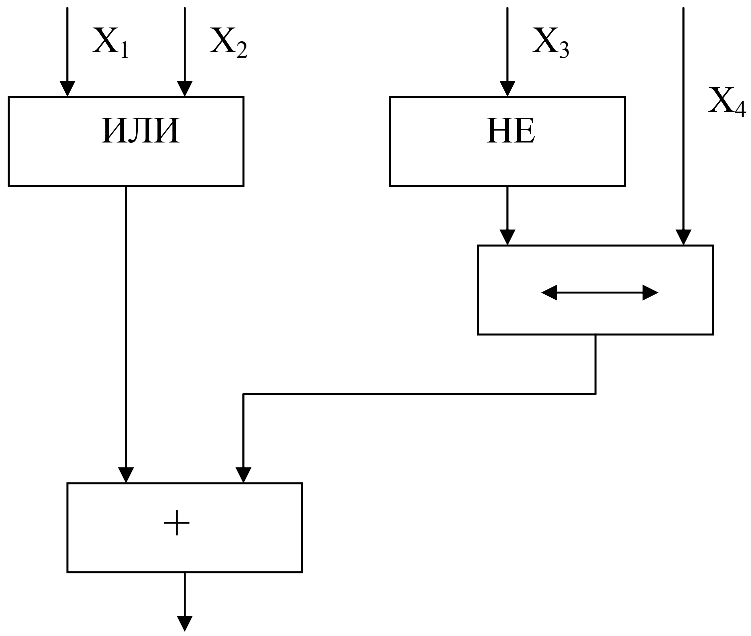
## 5.2 Логические элементы элементарных булевых функций.

Устройства, реализующие элементарные булевы функции, называются **логическими элементами**. Логические элементы изображаются в виде прямоугольников, внутри которых помещаются условные названия или символы соответствующих функций $f(x_1, x_2, ..., x_n)$:

| Функция | Графическое изображение | Функция | Графическое изображении |
|---|---|---|---|
| $\bar{x}$ | X<br>НЕ | $x_1 x_2$ | $X_1$ $X_2$<br>И |
| $x_1 \vee x_2$ | $X_1$ $X_2$<br>ИЛИ | $x_1 \Rightarrow x_2$ | $X_1$ $X_2$<br>$\Rightarrow$ |
| $x_1 \Leftrightarrow x_2$ | $X_1$ $X_2$<br>$\longleftrightarrow$ | $x_1 + x_2$ | $X_1$ $X_2$<br>+ |
| $x_1 \mid x_2$ | $X_1$ $X_2$<br>НЕ ИЛИ | | |

Из данных логических элементов путем соединения входа одного из них с выходом другого можно строить все более сложные логические схемы. Для полученных таким образом схем легко записывают соответствующие им булевы функции.

Например, схема

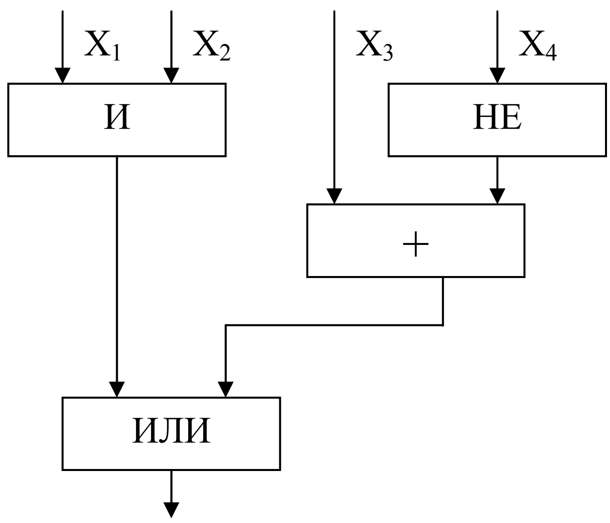



реализуется булевой функцией

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2) + (\overline{x_3} \Rightarrow x_4)$$

Нетрудно для любой булевой функции построить реализующую ее логическую схему.

Например, булева функция $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee (\overline{x_3} + x_2)$ реализуется логической схемой




**5.3 Двоичный сумматор.**

Рассмотрим построение логической схемы на примере одноразрядного сумматора, выполняющего арифметическое сложение двоичных чисел $x_k$ и $y_k$, $k$-го разряда и переноса из младшего разряда $P_{K-1}$. Пусть $S_k$ – получаемая сумма, а $P_k$ – перенос в старший разряд, тогда получаем следующую таблицу истинности такого сумматора.

| $x_k$ | $y_k$ | $P_{k-1}$ | $S_k$ | $P_k$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Отсюда получаем $S_k = \overline{x}\,\overline{y}P_{k-1} \vee \overline{x_k}\,y_k P_{k-1} \vee x_k\,\overline{y_k}\,\overline{P_{k-1}} \vee x_k y_k P_{k-1}$;

$$P_k = \overline{x_k}\,y_k P_{k-1} \vee x_k\,\overline{y_k}\,P_{k-1} \vee x_k y_k \overline{P_k} \vee x_k y_k P_k = x_k y_k \vee (x_k \vee y_k)P_{k-1}.$$

Построим схему, соответствующую данному сумматору. Для этого вначале упростим выражение для $S_k$. Как легко заметить, выражение для $S_k$ не упрощается, при использовании предыдущих методов. Для упрощения выражения функции $S_k$ используем выражение функции $P_k$.

Поэтому будем рассматривать $P_k$ как переменную величину. В результате получаем следующую таблицу, которая содержит избыточные наборы переменных:

| $x_k$ | $y_k$ | $P_{k-1}$ | $S_k$ | $P_k$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | |
| 0 | 1 | 1 | 0 | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

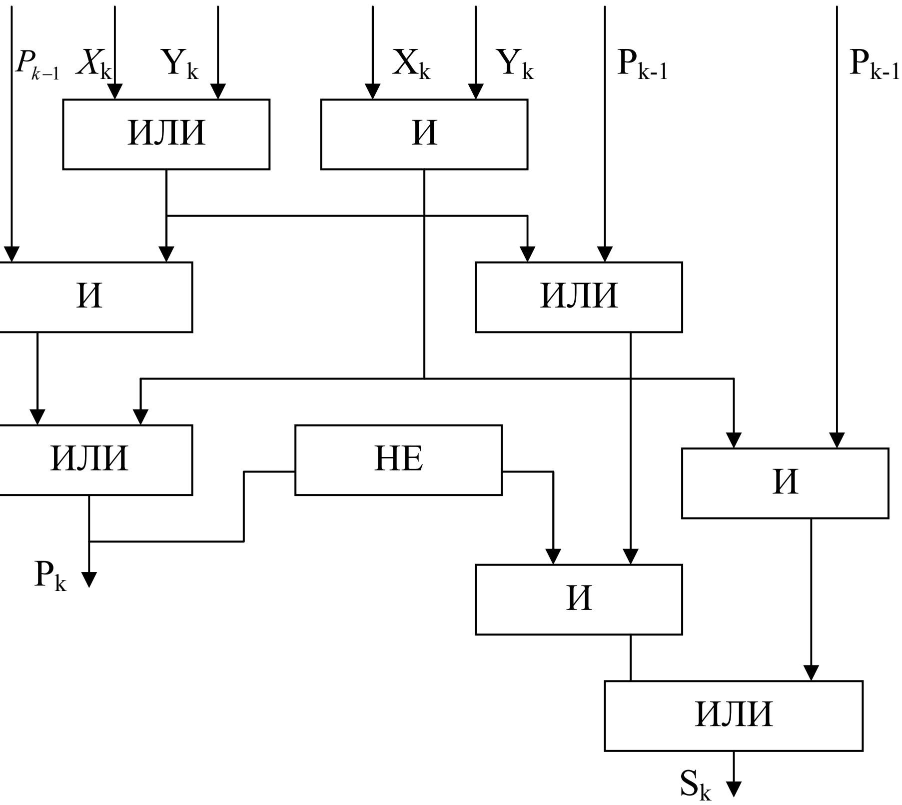
Отсюда $S_k = \overline{x_k}\,\overline{y_k} P_{K-1} \overline{P_k} \vee \overline{x_k} y_k \overline{P_{k=1}}\,\overline{P_K} \vee x_k \overline{y_k}\,\overline{P_{k-1}}\,\overline{P_k} \vee x_k y_k P_{k-1} P_k$.

Используя методы, которые будут рассмотрены в теме 6, нетрудно упростить выражение для $S_k$:

$$S_k = x_k \overline{P_k} \vee y_k \overline{P_k} \vee P_{k-1} \overline{P_k} \vee x_k y_k P_{k-1} = (x_k \vee y_k \vee P_{k-1}) \overline{P_k} \vee x_k y_k P_{k-1},$$

где $P_k = x_k y_k \vee (x_k \vee y_k) P_{k-1}$.

Теперь строим логическую схему:




**Вопросы для самоконтроля**

1 Что такое релейно-контактная схема?

2 Почему любую булеву функцию можно изобразить в виде релейно-контактной схемы?

3 В чем состоит проблема анализа релейно-контактных схем?

4 В чем состоит проблема синтеза релейно-контактных схем?

5 Что такое логические элементы?

6 Приведите геометрическое изображение логических элементов.

7 Что такое логическая схема и двоичный сумматор?

# ТЕМА 6 МИНИМИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

6.1 Сокращенная и тупиковая ДНФ

6.2 Метод импликантных матриц

Цель данного раздела – изложение основных методов построения минимальных дизъюнктивно нормальных форм.

## 6.1 Сокращенная и тупиковая ДНФ.

В теме 3 было показано, что любая булева функция может быть представлена дизъюнктивной нормальной формой. Следует отметить, что дизъюнктивная нормальная форма часто допускает упрощение. При этом путем различных тождественных преобразований получится дизъюнктивная нормальная форма, эквивалентная исходной, но содержащая меньшее число вхождений символов.

Дизъюнктивная нормальная форма называется **минимальной**, если она включает минимальное число символов по сравнению со всеми другими эквивалентами ей дизъюнктивными нормальными формами.

Заметим, что если некоторый символ в формуле, скажем $x_i$, встречается, например, два раза, то при подсчете числа символов в формуле он учитывается два раза.

Основной вопрос данного параграфа – как для произвольной булевой функции построить ей минимальную дизъюнктивную нормальную форму. Эта задача называется **проблемой минимизации булевых функций.**

Существует тривиальный алгоритм построения минимальной ДНФ для произвольной булевой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Для этого все ДНФ, составленные из символов $x_1, ..., x_n, \overline{x_1}, ..., \overline{x_n}$ упорядочиваются по числу букв и по порядку для каждой ДНФ Д проверяется соотношение $Д = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Первая по порядку ДНФ, для которой это соотношение выполняется, есть, очевидно, минимальная ДНФ функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

**Число различных ДНФ, составленных из переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, равно $2^{3^n}$.**

Прежде чем доказать данное утверждение, приведем следующее определение.

Конъюнкция $x_1^{G1} x_2^{G2} ... x_r^{Gr}$ называется **элементарной**, если $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$.

Число $r$ называется **рангом элементарной конъюнкции.** В случае r = 0 конъюнкция называется **пустой** и **полагается равной 1.**

Так как каждая из $n$ переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ либо не входит в элементарную, либо входит в нее с отрицанием, или без отрицания, то число элементарных конъюнкций, составленных из $x_1, x_2, ..., x_n$ равно $3^n$. Ясно, что число различных ДНФ, составленных из переменной $x_1, x_2, ..., x_n$, равно числу подмножеств множества, из $3^n$ элементов, т.е. $2^{3^n}$.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию задачи минимизации булевых функций.

Обозначим через $E^n$ множество всех точек $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, где $\alpha_i \in \{0,1\}, i = 1,2,...,n$. Ясно, что $E^n$ – множество всех вершин единичного n-мерного куба.

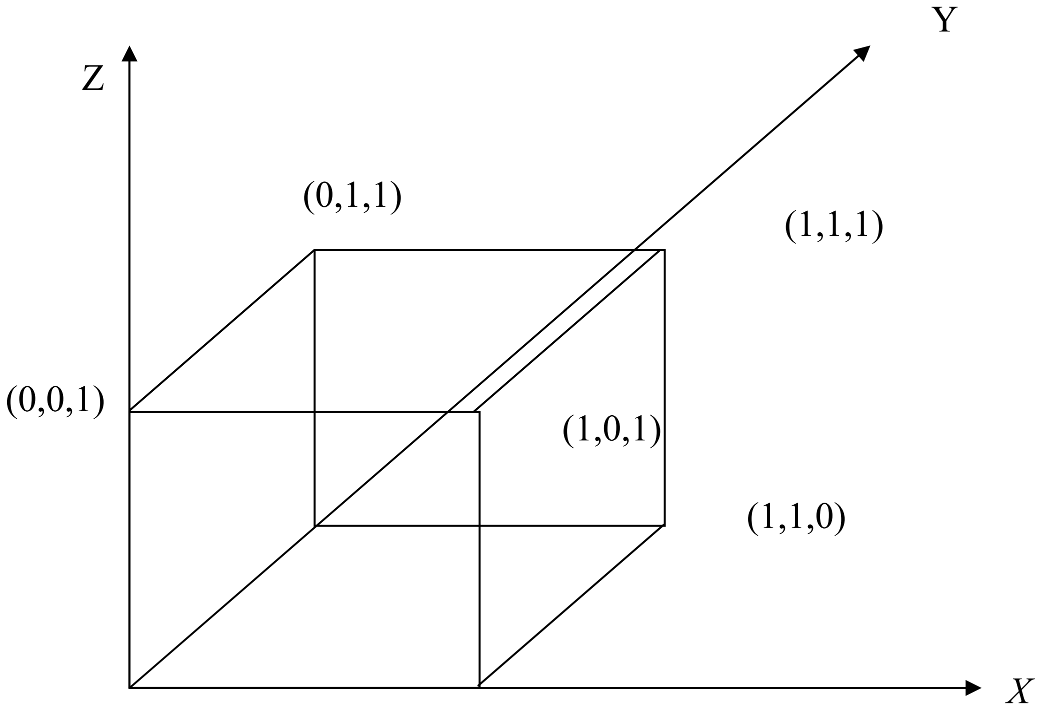
Сопоставим каждой булевой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ подмножество $N_f$ из $E^n$, определенное следующим образом:

$$N_f = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \mid f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = 1\}.$$

Например, функции, заданной следующей таблицей истинности:

| $x$ | y | z | $f(x,y,z)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

соответствует подмножество $N_f = \{(0,0,1),(0,1,1,),(1,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}$ вершин трехмерного единичного куба




Данное соответствие является взаимно однозначным и обладает следующими свойствами:

1) булевой функции $\bar{f}$ соответствует подмножество $E_n \setminus N_f$;

2) булевой функции $f_1 \cdot f_2$ соответствует подмножество $N_{f1} \cap N_{f2}$;

3) булевой функции $f_1 v f_2$ соответствует подмножество $N_{f1} \cup N_{f2}$.

Докажем свойство 2. Пусть $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in N_{f1 \cdot f2}$

Отсюда $f_1(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) f_2(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 1$.

Тогда $f_1(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = f_2(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = 1$.

А это значит, что $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in N_{f_1},(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in N_{f_2}$.

Отсюда $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in N_{f_1}\cap N_{f_2}$.

Пусть $f=K_1\vee K_2\vee...\vee K_t$ ДНФ, где $K_i$ – элементарные конъюнкции. Подмножество $N_K$ называется интервалом *r*-го ранга, если оно соответствует элементарной конъюнкции *К* *r*-го ранга. Как показано выше, $N_f=N_{K_1}\cup N_{K_2}\cup...\cup N_{K_n}$. Итак, с каждой ДНФ функции *f* связано покрытие $N_f$ такими интервалами $N_{K_1},...,N_{K_t}$, что $N_{K_i}\subseteq N_f$.

Пусть $r_i$ – ранг интервала $N_{ki}$. Тогда $r=\sum_{i=1}^{m}r_i$ совпадает с числом букв в ДНФ $K_1\vee K_2\vee...\vee K_m$ функции $f$.

Теперь ясно, что задача построения минимальной ДНФ сводится к отысканию такого покрытия подмножества $N_f$ интервалами $N_{K_i}\subseteq N_f$, чтобы число $r=\sum_{i=1}^{m}r_i$ было наименьшим.

Интервал $N_K$, содержащий $N_f$, называется **максимальным для булевой функции**, если не существует интервала $N_k$, такого, что $N_K\subset N_{K^*}\subseteq N_f$.

Заметим, что соотношение $N_K\subset N_{K^*}$ выполняется тогда и только тогда, когда элементарная конъюнкция $K^*$ получается из элементарной конъюнкции К путем вычеркивания непустого числа сомножителей.

Очевидно, что каждый интервал $N_K$ из $N_f$ содержится в некотором максимальном интервале. Если $N_{K_1},N_{K_2},...,N_{K_m}$ – список всех максимальных интервалов подмножества $N_f$, то нетрудно видеть, что $N_f=N_{K_1}\cup N_{K_2}\cup...\cup N_{K_m}$.

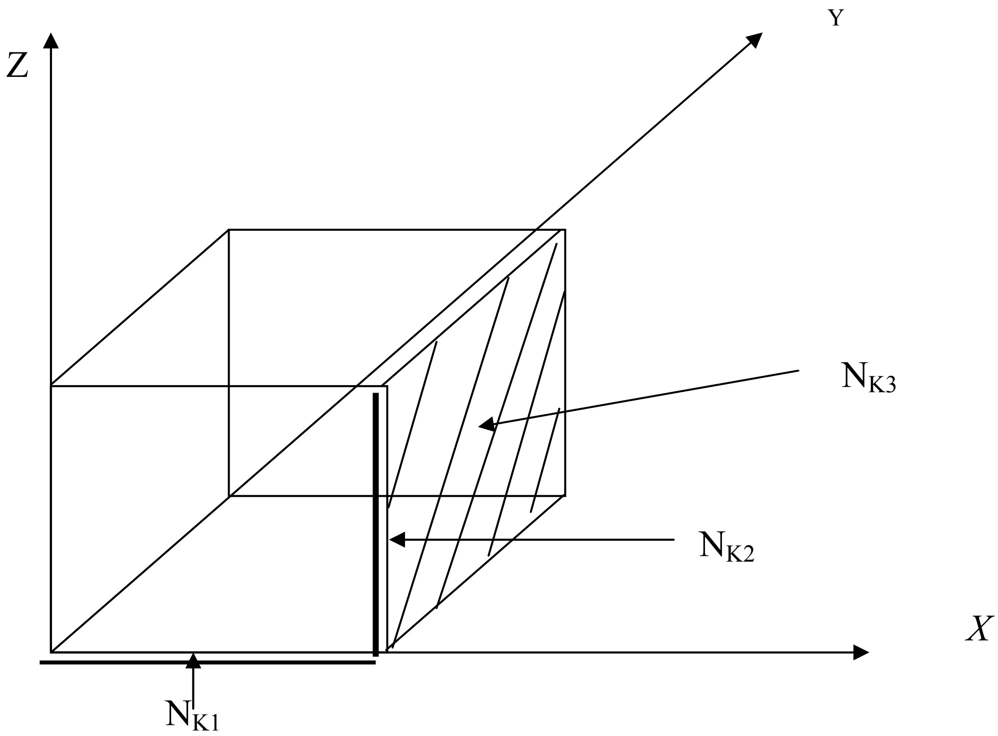
ДНФ $K_1\vee K_2\vee...\vee K_m$ булевой функции *f*, соответствующая покрытию подмножества $N_f$ всеми максимальными интервалами, называется **сокра-**

**щенной ДНФ функции *f*.**

Ясно, что сокращенная ДНФ для любой булевой функции *f* определяется однозначно.

**Пример 1** Пусть $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x_2}\,\overline{x_3}\vee x_1\overline{x_2}\vee x_1$. Обозначим $K_1=\overline{x_2}\,\overline{x_3}$, $K_2=x_1\overline{x_2}$, $K_3=x_1$. Найдем соответствующие этим конъюнкциям интервалы $N_{K_1}=\{(0,0,0,),(1,0,0,)\}$, $N_{K_2}=\{(1,0,0)(1,0,1)\}$, $N_{K_3}=\{(1,0,0),(1,0,1)(1,1,0)(1,1,1)\}$.

Изобразим эти интервалы




Очевидно, что $N_{K_1}$ и $N_{K_3}$ – все максимальные интервалы. Интервал $N_{K_2}$ не является максимальным, ибо $N_{K_2}\subseteq N_{K_3}\subseteq N_f$. Следовательно, покрытию подмножества $N_f=N_{K_1}\cup N_{K_3}$ соответствует сокращенная ДНФ функции $f(x_1,x_2,x_3)$, равная $\overline{x_2}\,\overline{x_3}\vee x_1$.

Данный геометрический подход дает и метод построения сокращенной ДНФ.

Теперь рассмотрим аналитический метод построения сокращенной ДНФ – метод Блейка. Этот метод основан на следующей теореме.

**Теорема 1** *Если в произвольной ДНФ булевой функции f произвести все возможные обобщения склеивания и устранить затем все элементарные поглощения, то в результате получится сокращенная ДНФ функции f.*

Следовательно, чтобы найти сокращенную ДНФ, надо к произвольной ДНФ данной функции применить правило обобщенного склеивания $xK_1 \vee \bar{x}K_2 = xK_1 \vee \bar{x}K_2 \vee K_1K_2$ до тех пор, пока это возможно, а затем правило поглощения.

**Пример 2** Найти сокращенную ДНФ для функции

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee \overline{x_1}x_3 \vee \overline{x_1}x_3.$$

Применяя правило обобщенного склеивания, получаем:
$x_1x_2 \vee \overline{x_1}x_3 \vee x_2x_3 \vee \overline{x_2}x_3 \vee x_3 \vee x_1x_3$, а затем правило поглощения и находим сокращенную ДНФ: $x_1x_2 \vee x_3$.

Рассмотрим еще один метод построения сокращенной ДНФ – метод Нельсона. Этот метод основан на следующей теореме.

**Теорема 2** *Если в произвольной КНФ булевой функции раскрыть все скобки в соответствии с дистрибутивным законом и устранить все элементарные поглощения, то в результате получится сокращенная ДНФ этой функции.*

**Пример 3** Найти сокращенную ДНФ для функции

$$f(x, y, z) = (x \vee y)(\bar{x} \vee y \vee z).$$

После раскрытия скобок с помощью дистрибутивного закона, получаем:

$$x\bar{x} \vee xy \vee xz \vee y\bar{x} \vee yy \vee yz.$$

Так как $x\bar{x} = 0$, $yy = y$, то имеем:

$$xy \vee xz \vee y\bar{x} \vee y \vee yz.$$

Далее, применяя правило поглощения, получаем сокращенную ДНФ:

$$xz \vee y.$$

Рассмотрим табличный метод построения сокращенной ДНФ. Этот метод основан на составлении прямоугольной таблицы (минимизирующей карты).

Минимизирующие карты для булевых функций от трех и от четырех переменных изображены в следующих таблицах:

| $x\ y \backslash z$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 00 | | |
| 01 | | |
| 11 | | |
| 10 | | |

| $x_1\ x_2 \backslash x_4\ x_3$ | 0<br>0 | 0<br>1 | 1<br>1 | 1<br>0 |
|---|---|---|---|---|
| 0 0 | | | | |
| 0 1 | | | | |
| 1 1 | | | | |
| 1 0 | | | | |

Объединяя соседние клетки, соответствующие единичным значениям булевой функции *f* в максимальные интервалы, и сопоставляя им элементарные конъюнкции, получим сокращенную ДНФ. Отметим, что клетки, расположенные по краям таблицы, также считаются соседними. Покажем работу этого метода на следующем примере.

**Пример 4** Найти сокращенную ДНФ для функции, заданной следующей таблицей.

| $x_1\ x_2 \backslash x_4\ x_3$ | 0<br>0 | 0<br>1 | 1<br>1 | 1<br>0 |
|---|---|---|---|---|
| 0 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

В данной таблице объединены клетки в максимальные интервалы

$N_{k1} = \{(1,1,0,1),(1,1,0,0)\}$

$N_{k2} = \{(1,1,1,1),(0,1,1,1),(1,1,0,1),(0,1,0,1)\}$

$N_{K3} = \{(0,0,0,1),(0,1,0,1),(1,0,0,1),(1,1,0,1)\}$

$N_{k4} = \{(0,0,0,0),(0,0,1,0)\}$

$N_{k5} = \{(0,0,0,0),(0,0,0,1)\}$.

Этим интервалам соответствуют элементарные конъюнкции

$K_1 = x_1 x_2 \overline{x_3}$, $K_2 = x_2 x_4$, $K_3 = \overline{x_3} x_4$, $K_4 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4}$, $K_5 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$.

Следовательно, сокращенная ДНФ для данной функции имеет вид:

$$x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_2 x_4 \vee \overline{x_3} x_4 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}.$$

Построение сокращенной ДНФ есть только первый этап решения задачи минимизации булевой функции. В общем случае сокращенная ДНФ не является минимальной. Следующая теорема устанавливает связь между минимальной и сокращенной ДНФ.

**Теорема 3** *Минимальная ДНФ булевой функции получается из сокращенной ДНФ данной функции путем удаления некоторых элементарных конъюнкций.*

Доказательство этого утверждения следует из того факта, что покрытие подмножества $N_f$, отвечающее минимальной ДНФ, состоит только из максимальных интервалов. Действительно, если бы покрытие содержало не максимальный интервал, то его можно было бы заменить объемлющим максимальным интервалом. В результате этого сумма рангов интервалов данного покрытия уменьшилась бы, что противоречит предположению о минимальности ДНФ.

Покажем, что в классе монотонных функций понятия минимальной и сокращенной ДНФ совпадают.

**Теорема 4** *Сокращенная ДНФ монотонной булевой функции не содержит отрицаний переменных и является минимальной ДНФ этой функции.*

Пусть $K$ – элементарная конъюнкция, входящая в сокращенную ДНФ. Предположим, что $K$ содержит отрицание переменных. Обозначим через $K_1$ произведение всех переменных, входящих в $K$ без отрицания. Пусть $\widetilde{a}$ – набор переменных, в которых всем переменным, входящим в $K_1$, приписано значение 1, а всем остальным – значение 0. Ясно, что при этом наборе значение функции $f$ равно 1. Элементарная конъюнкция $K_1$ обращается в 1 при всех наборах $\widetilde{b} \geq \widetilde{a}$. Очевидно, что при этих наборах значение функции $f$ также равно 1. Следовательно, $N_K \subset N_{K1} \subseteq N_f$.

Получили противоречие с максимальностью интервала $N_k$. Итак, сокращенная ДНФ булевой функции $f$ не содержит отрицаний переменных.

Пусть $K = x_1 x_2 \ldots x_k$ – любая элементарная конъюнкция из сокращенной ДНФ. Конъюнкция $K$ является единственной конъюнкцией сокращенной ДНФ, которая обращается в единицу в вершине с координатами $x_1 = x_2 = \ldots x_r = 1,\ \ x_{r+1} = x_{r+2} = \ldots = x_n = 0$. Действительно, если бы в сокращенной ДНФ какая-нибудь другая элементарная конъюнкция $K'$ обращалась в этой вершине в 1, то не содержала бы, во-первых, букв $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}$, и, во-вторых, букв $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Поэтому в конъюнкцию $K^*$ могли бы входить лишь буквы $x_1, \ldots, x_r$, причем не все. Но тогда $N_K \subset N_{K^*} \subseteq N_f$. Получили противоречие с максимальностью интервала $N_K$. Следовательно, для любого максимального интервала $N_K$ существует вершина куба $E''$, которая покрывается только этим интервалом. Поэтому из покрытия $N_f$ соответствующего сокращенной ДНФ, нельзя удалить ни один из интервалов. Теперь, применяя предыдущую теорему, получаем требуемый результат.

Следует отметить, что сокращенная ДНФ в большинстве случаев допускает дальнейшие упрощения за счет того, что некоторые элементарные конъюнкции могут поглощаться дизъюнкциями других элементарных конъюнкций. Действительно, в сокращенной ДНФ

$$f(x,y,z) = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee xz \vee yz$$

элементарная конъюнкция $yz$ поглощается дизъюнкцией остальных элементарных конъюнкций, т.е. $\bar{x}y \vee x\bar{y} \vee xz \vee yz = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee xz$.

Ввиду этого введем следующее определение.

Покрытие области истинности булевой функции максимальными интервалами называется **неприводимым**, если после удаления из него любого интервала оно перестает быть покрытием. ДНФ булевой функции $f$, соответствующая неприводимому покрытию, называется **тупиковой.**

**Теорема 5** *Всякая минимальная ДНФ является тупиковой.*

Доказательство этого утверждения следует из того, что покрытие, соответствующее минимальной ДНФ, является неприводимым.

Заметим, что булева функция может обладать несколькими различными минимальными ДНФ. Существуют также тупиковые ДНФ, не являющиеся минимальными ДНФ. Соответствующие примеры будут разобраны ниже.

Из того, что минимальная ДНФ является тупиковой, следует общая схема решения задачи минимизации булевых функций.

1 Выделяются все максимальные интервалы, и строится сокращенная ДНФ.

2 Строятся все тупиковые ДНФ.

3 Среди всех тупиковых ДНФ выделяются все минимальные ДНФ.

Рассмотрим алгоритм построения всех тупиковых ДНФ. Суть данного алгоритма состоит в следующем:

1) для булевой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ строим сокращенную ДНФ;

2) для каждой вершины $a_j$ из $N_f, j = 1,2,...,k$ выделяем в сокращенной ДНФ функции $f$ все такие элементарные конъюнкции $K_{1j},...,K_{tj}$, что $K_{ij}(a_j) = 1, i = 1,2,...,t$;

3) составляем выражение вида

$$(K_{11} \vee K_{12} \vee ... \vee K_{1t})(K_{21} \vee K_{22} \vee ... \vee K_{2t})...(K_{k1} \vee K_{k2} \vee ... \vee K_{kt}) \qquad (6.1)$$

4) применяем к выражению вида (6.1) законы дистрибутивности и поглощения. В результате получаем $VK_{i1}K_{i2}...K_{im}$.

Теперь каждая ДНФ $K_{i1} \vee K_{i2} \vee ... \vee K_{im}$ является тупиковой ДНФ функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Рассмотрим работу данного алгоритма на следующем примере.

**Пример 5** Рассмотрим булеву функцию, заданную следующей таблицей:

| $x$ | $y$ | $z$ | $f(x,y,z)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Найдем сокращенную ДНФ данной функции по методу Нельсона. Для этого составим КНФ данной функции $(x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$.

Применяя законы дистрибутивности, получаем:

$x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \bar{x}y \vee y\bar{z} \vee z\bar{x} \vee z\bar{y}$.

Обозначим $K_1 = x\bar{y}$, $K_2 = x\bar{z}$, $K_3 = \bar{x}y$, $K_4 = y\bar{z}$, $K_5 = z\bar{x}$, $K_6 = z\bar{y}$.

$N_f = \{(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1)(1,0,0),(1,0,1)(1,1,0)\}$

Составляем выражение (6.1)

$(K_5 \vee K_6)(K_3 \vee K_4)(K_3 \vee K_5)(K_1 \vee K_2)(K_1 \vee K_6)(K_2 \vee K_4)$.

Преобразуем данное выражение к виду

$(K_5 \vee K_3K_6)(K_4 \vee K_2K_3)(K_1 \vee K_2K_6) =$
$K_1K_4K_5 \vee K_1K_2K_3K_5 \vee K_1K_3K_4K_6 \vee K_1K_2K_3K_6 \vee$
$\vee K_2K_4K_5K_6 \vee K_2K_3K_5K_6 \vee K_2K_3K_4K_6 \vee K_2K_3K_6 =$
$K_1K_4K_5 \vee K_1K_2K_3K_5 \vee K_1K_3K_4K_6 \vee K_1K_2K_3K_6 \vee K_2K_4K_5K_6 \vee K_2K_3K_6$.

Таким образом, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет шесть тупиковых ДНФ:

1) $Д_1 = K_1 \vee K_4 \vee K_5 = x\bar{y} \vee y\bar{z} \vee z\bar{x}$;

2) $Д_2 = K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee K_5 = x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \bar{x}y \vee z\bar{x}$;

3) $Д_3 = K_1 \vee K_2 \vee K_4 \vee K_6 = x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee y\bar{z} \vee z\bar{y}$;

4) $Д_4 = K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee K_6 = x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \bar{x}y \vee z\bar{y}$;

5) $Д_5 = K_2 \vee K_4 \vee K_5 \vee K_6 = x\bar{z} \vee y\bar{z} \vee z\bar{x} \vee z\bar{y}$;

6) $Д_6 = K_2 \vee K_3 \vee K_6 = x\bar{z} \vee \bar{x}y \vee z\bar{y}$.

Две из них $Д_1$ и $Д_6$ являются минимальными.

### 6.2 Метод импликантных матриц

Для булевой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ находим сокращенную ДНФ $f = K_1 \vee K_2 \vee ... \vee K_z$. Построим для этой функции импликантную матрицу, представляющую собой таблицу, в вертикальные входы которой записываются $K_1, K_2, ..., K_t$, а в горизонтальные $N_f = \{\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_p\}$.

| | $\tilde{a}_1$ | $\tilde{a}_2$ | $\dots$ | $\tilde{a}_j$ | $\dots$ | $\tilde{a}_p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $K_1$ | | | | | | |
| $K_2$ | | | | | | |
| $\dots$ | | | | | | |
| $K_i$ | | | | $+$ | | |
| $\dots$ | | | | | | |
| $K_k$ | | | | | | |

Для каждой $K_i$ находим набор $\tilde{a}_j$ такой, что $K_i(\tilde{a}_j) = 1$.

Клетку импликантной матрицы, образованную пересечением *i*-строки и *j*-столбца отметим крестиком.

Чтобы получить минимальную ДНФ заданной функции, достаточно найти минимальное число $K_i, i = 1,2,...,t$, которое совместно накрывают крестиками все столбцы импликантной матрицы.

**Пример 6** Найти минимальные ДНФ для функции

$f(x, y, z) = (x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$.

Из предыдущего примера следует, что сокращенная ДНФ для данной функции $x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \bar{x}y \vee y\bar{z} \vee z\bar{x} \vee z\bar{y}$. Очевидно, что

$N_f = \{(0,0,1), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,0,1), (1,1,0)\}$.

Строим импликантную матрицу в виде таблицы

| | (0,0,1) | (0,1,0) | (0,1,1) | (1,0,0) | (1,0,1) | (1,1,0) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x\bar{y}$ | | | | + | + | |
| $x\bar{z}$ | | | | + | | + |
| $\bar{x}y$ | | + | + | | | |
| $y\bar{z}$ | | + | | | | + |
| $y\bar{z}$ | + | | + | | | |
| $z\bar{y}$ | + | | | | + | |

Отсюда видно, что данная функция имеет две минимальные ДНФ: $x\bar{y} \vee y\bar{z} \vee z\bar{x}$; $x\bar{z} \vee \bar{x}y \vee z\bar{y}$.

**Вопросы для самоконтроля**

1 Какая ДНФ называется минимальной?

2 Чему равно число всех ДНФ от $n$ переменных?

3 Сформулируйте тривиальный алгоритм построения МДНФ?

4 Что такое элементарная конъюнкция?

5 Что такое ранг элементарной конъюнкции?

6 Что называется интервалом элементарной конъюнкции?

7 Какой интервал называется максимальным?

8 Что называется областью истинности булевой функции?

9 Сформулируйте теорему об области истинности булевой функции.

10 Что называется покрытием области истинности булевой функции?

11 Какое число элементов содержится в интервале?

12 Какая ДНФ называется сокращенной?

13 В чем состоит геометрическая интерпретация задачи минимизации булевой функции?

14 Сформулируйте геометрический метод построения сокращенной ДНФ.

15 Сформулируйте метод Нельсона построения сокращенной ДНФ.

16 Сформулируйте метод Блейка построения сокращенной ДНФ.

17 Сформулируйте метод карт Карно построения сокращенной ДНФ.

18 Какая связь между МДНФ и сокращенной ДНФ?

19 Какое покрытие области истинности булевой функции называется неприводимым?

20 Какая ДНФ называется тупиковой?

21 Какая связь между МДНФ и тупиковой ДНФ?

22 Сформулируйте алгоритм построения всех тупиковых ДНФ.

23 Как строится импликантная матрица?

24 Сформулируйте алгоритм нахождения МДНФ методом импликантных матриц.

## ТЕМА 7 АЛГЕБРА ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ



Напомним, что под высказыванием мы понимаем предложение, о котором можно сказать одно из двух: истинно оно или ложно. Понятие предиката обобщает понятие высказывания. Теория предикатов представляет собой более тонкий инструмент, по сравнению с теорией высказываний. В настоящей главе рассматривается основные положения теории алгебры предикатов.

### 7.1 Основные понятия и определения алгебры логики предикатов

**Определение 1** $n$-местным предикатом, определённым на множествах $M_1, M_2,\ldots,M_n$, называется предложение, содержащее $n$ переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$ превращающееся в высказывание при подстановке вместо этих переменных любых конкретных элементов из множеств $M_1, M_2,\ldots,M_n$ соответственно.

Обозначать $n$-местные предикаты будем $A\ (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, причём переменные $x_1,x_2,\ldots,x_n$ называются предметными.

Всякий $n$-местный предикат $A\ (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, определённый на множествах $M_1, M_2,\ldots,M_n$ есть функция от n аргументов, заданная на указанных множествах и принимающая значение 0(ложно) или 1(истинно).

Будем говорить, что $n$-местный предикат $A\ (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ задан на множестве $M$, если $x_1,x_2,\ldots,x_n$ принимают значения из $M$.

Примерами предикатов являются любые уравнения и неравенства из школьного курса математики.

Например, $x+y>2$, где $x$,у из $R$ есть двухместный предикат заданный на множестве всех действительных чисел $R$.

**Определение 2** Предикат $A\ (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, заданный на множествах $M_1,\ M_2,\ldots,M_n$ называется:

**1) тождественно истинным**, если при любой подстановке вместо переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$ любых конкретных значений из множеств $M_1,\ M_2,\ldots,M_n$ он превращается в истинное высказывание;

**2) тождественно ложным**, если при любой подстановке вместо переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$ любых конкретных значений из множеств $M_1,\ M_2,\ldots,M_n$ соответственно он превращается в ложное высказывание;

**3) выполнимым**, если существует по крайней мере один набор значений переменных из $M_1,\ M_2,\ldots,M_n$, при которых его значение истинно.

Обозначают: тождественно истинный – $A\ (x_1,x_2,\ldots,x_n) \equiv 1$; тождественно ложный – $A\ (x_1,x_2,\ldots,x_n) \equiv 0$.

Двухместный предикат $x^2+y^2 \geq 0$, заданный на множестве $R$ является тождественно истинным.

Одноместный предикат $\sin x > 1$, заданный на множестве $R$ является тождественно ложным.

Примером выполнимого предиката заданного на множестве R является предикат $x+y > z$.

**Определение 3** Множеством истинности предиката $A\ (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ заданного на множествах $M_1,\ M_2,\ldots,M_n$ называется совокупность всех упорядоченных наборов $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, где $a_i \in M_i$, $i=1,2,\ldots,n$ при которых $A(a_1,a_2,\ldots,a_n) =1$.

Множество истинности предиката $A\ (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ мы будем обозначать $N_A$.

Пусть $A(x)=(x^2+3x - 4=0)$ – одноместный предикат, заданный на множестве $R$. Ясно, что $N_A=\{1,-4\}$. Однако, если данный предикат задан на множестве натуральных чисел, то его множество истинности $N'_A=\{1\}$.

Пусть $x^2+y^2=4$ – двухместный предикат, заданный на множестве действительных чисел $R$. Тогда множеством истинности его являются множества всех таких пар действительных чисел, которые являются координатами точек плоскости, лежащих на окружности с центром в начале координат и радиусом 2.

Непосредственно из определения 2 следует справедливость следующего утверждения.

Пусть $A\ (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ $n$-местный предикат, заданный на множествах

$M_1,\ M_2,\ldots,M_n$ тогда справедливы следующие утверждения :

1) $A\ (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ является тождественно истинным тогда и только тогда, когда $N_A= M_1\times M_2\times\ldots\times M_n$;

2) $A\ (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ является тождественно ложным тогда и только тогда, когда $N_A=\varnothing$;

3) $A\ (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ является выполнимым тогда и только тогда, когда $N_A\neq\varnothing$.

**Определение 4** Два $n$-местных предиката $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $B(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ заданных на одних и тех же множествах $M_1,\ M_2,\ldots,M_n$ называются равносильными, если для любых наборов переменных $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, где $a_i\in M_i$, $i=1,2,\ldots,n$ они принимают одинаковые логические значения.

Непосредственно из данного определения следует, что предикаты

$A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $B(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ равносильны тогда и только тогда, когда их множества истинности совпадают, то есть $N_A=N_B$.

Тот факт, что предикаты $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $B(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ равносильны будем обозначать так: $A=B$.

**Определение 5** Предикат $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ определённый на множествах $M_1,\ M_2,\ldots,M_n$ называется следствием предиката $B(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ определённом над теми же множествами, если он принимает истинные значения на всех тех наборах значений переменных, на которых истинно значение предиката $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$**.**

Другими словами можно сказать, что предикат $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ является следствием предиката $B(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ тогда и только тогда, когда $N_B\subseteq N_A$.

Пусть $A_1(x)=x\vdots 2$ ($x$ делится на 2), $A_2(x)= x\vdots 4$ ($x$ делится на 4) два одноместных предиката заданных на множестве натуральных чисел. Ясно, что предикат $A_1$ является следствием предиката $A_2$.

Так как любой предикат при фиксированных значениях переменных превращается в высказывание, то над ними можно проделывать те же логические операции, что и над высказываниями.

**Определение 6** Отрицанием n-местного предиката $A\ (x_1,x_2,\dots,x_n)$, определённого на множествах $M_1,\ M_2,\dots,M_n$ называется $n$-местный предикат, определённый на тех же множествах, обозначаемый $\overline{A(x_1,x_2,\dots,x_n)}$, значение которого истинно при всех тех значениях переменных, при которых значение предиката ложно.

Например, отрицанием двухместного предиката $x+y > 2$, определённого на множестве $R$ является предикат $x+y < 2$, определённый на том же множестве $R$.

**Теорема 1** *Пусть* $A(x_1,x_2,\dots,x_n)$ *– n-местный предикат, определённый на множествах* $M_1,\ M_2,\dots,M_n$*. Тогда справедливо следующее тождество:*

$$N_{\overline{A}} = (M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n) \setminus N_A .$$

***Доказательство.*** Пусть $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ – произвольный набор переменных из $N_{\overline{A}}$. Тогда $\overline{A(x_1,x_2,\dots,x_n)}=1$. Это возможно только тогда, когда $A(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$. А это значит, что

$$(a_1,a_2,\dots,a_n) \in (M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n) \setminus N_A .$$

Отсюда следует справедливость указанного тождества. Непосредственно из данной теоремы следует:

**Следствие.** Отрицание предиката будет тождественно истинным тогда и только тогда, когда исходный предикат тождественно ложен.

**Определение 7** Конъюнкцией $n$-местных предикатов $A(x_1,x_2,\dots,x_n)$ и $B(x_1,x_2,\dots,x_n)$, определённых на множествах $M_1,M_2,\dots,M_n$ называется n-местный предикат, определённый на тех же множествах, обозначаемый $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, значение которого истинно при тех и только тех наборах переменных, при которых истинно значение исходных предикатов.

**Теорема 2** *Пусть* $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *и* $B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *два n-местных предиката определённые на множествах* $M_1, M_2, \ldots, M_n$. *Тогда справедливо следующее тождество:* $N_{A \cdot B} = N_A \bigcap N_B$.

***Доказательство.*** Пусть $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ - произвольный набор переменных из $N_{A \cdot B}$, тогда $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot B(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$. Это возможно только тогда, когда одновременно $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$ и $B(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$. А это значит, что $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in N_A \bigcap N_B$.Теорема доказана.

Непосредственно из данной теоремы следует:

**Следствие.** Конъюнкция двух предикатов тождественно истинна тогда и только тогда, когда оба данных предиката тождественно истинны.

Теорема 2 используется в школьном курсе математики при решении систем уравнений и неравенств. Например, требуется решить систему неравенств $|x| < 5$, $x \geq 3$. Для этого нужно найти множество истинности предиката $(|x| < 5) \cdot (x \geq 3)$, определённого на множестве R. Используя теорему 2, получаем:

$$N_{(|X|<5)\cdot(X \geq 3)} = N_{|X|<5} \bigcap N_{X \geq 3} = [-5{,}5] \bigcap [3, +\infty) = [3{,}5].$$

**Определение 8** Дизъюнкцией n-местных предикатов $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенных на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$ называется n-местный предикат, определенный на этих множествах, обозначенный $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, значение которого истинно при тех и только тех наборах переменных, при которых истинно значение по меньшей мере одного из исходных предикатов.

**Теорема 3** *Пусть* $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *и* $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *два n-местных предиката, определенные на множествах* $M_1, M_2, \dots, M_n$. *Тогда справедливо следующее тождество* $N_{AVB} = N_A \, U \, N_B$.

***Доказательство.*** Пусть $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ – произвольный набор переменных из $N_{AVB}$. Тогда $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \; V \; B(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$. Это возможно только тогда, когда или $A(x_1, x_2, \dots, x_n)=1$ или $B(x_1, x_2, \dots, x_n)=1$. А это значит, что $(a_1 \, a_2, \dots, a_n) \in N_A \, U \, N_B$. Теорема доказана.

**Следствие.** Дизъюнкция двух предикатов тождественно ложна тогда и только тогда, когда оба данных предиката тождественно ложны.

**Теорема 4** *Пусть* $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *и* $C(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – *n-местные предикаты, определенные на множествах* $M_1, M_2, \dots, M_n$, *тогда справедливы следующие равносильности:*

$$A \cdot B = B \cdot A,\ AVB = BVA,\ A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C,\ AV(BVC) = (AVB)VC,$$

$$A \cdot (BVC) = A \cdot BVA \cdot C,\ AVB \cdot C = (AVB) \cdot (AVC),\ \overline{A \cdot B} = \overline{A} \, V \, \overline{B},\ \overline{A \, V \, B} = \overline{A} \cdot \overline{B}.$$

***Доказательство.*** Докажем справедливость следующей равносильности $\overline{A \cdot B} = \overline{A} \vee \overline{B}$. Для этого нужно доказать справедливость следующего тождества $N_{\overline{A \cdot B}} = N_{\bar{A} \vee \bar{B}}$. Действительно, пусть $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ – произвольный набор переменных из $N_{\overline{A \cdot B}}$. Тогда $\overline{A(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot B(a_1, a_2, \dots, a_n)} = 1$. Отсюда получаем, что $A(a_1, a_2, \dots, a_n) \; B(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$. Это возможно только в том случае, когда либо $A(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$, либо $B(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$. А это значит, что либо $\overline{A(a_1, a_2, \dots, a_n)} = 1$, либо $\overline{B(a_1, a_2, \dots, a_n)} = 1$. Следовательно, $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in N_{\bar{A} \vee \bar{B}}$. Итак, $N_{\overline{A \cdot B}} = N_{\bar{A} \vee \bar{B}}$. Отсюда $\overline{A \cdot B} = \overline{A} \vee \overline{B}$. Аналогичным образом можно доказать справедливость других равносильностей. Теорема доказана.

**Определение 9** Пусть $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $n$-местные предикаты на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n$. Их импликацией называется предикат, определенный на тех же множествах, обозначаемый $A(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow B(x_1, x_2, \dots, x_n)$, значение которого ложно только при тех наборах переменных, при которых значение предиката $A$ истинно, а $B$ – ложно. Предикат $A$ называется посылкой и $B$ – заключением.

Непосредственно из определения следует, что импликация двух предикатов, зависящих от одних и тех же переменных, есть тождественно истинный предикат тогда и только тогда, когда ее заключение является следствием посылки.

**Определение 10** Эквивалентность двух $n$-местных предикатов $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенных на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$, называется $n$-местный предикат, определенный на тех же множествах, обозначаемый $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) <=> B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, значение которого истинно при всех тех наборах переменных, при которых предикаты $A$ и $B$ принимают одинаковые логические значения.

Непосредственно из определения 10 следует, что эквивалентность двух предикатов, зависящих от одних и тех же переменных, есть тождественно истинный предикат тогда и только тогда, когда они равносильны.

В следующей теореме доказаны важные равносильности, выражающие одни логические операции над предикатами через другие.

**Теорема 5** *Пусть $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $n$-местные предикаты, определенные на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Тогда справедливы следующие равносильности:*

$$A=>B=\overline{A} \vee B,\ A\cdot B=\overline{\overline{A} \vee \overline{B}},\ A<=>B=(A=>B)\cdot(B=>A).$$

***Доказательство*** Докажем справедливость следующей равносильности $A<=>B=(A=>B)\cdot(B=>A)$. Для этого нужно доказать справедливость следующего тождества $N_{A<=>B}=N_{(A=>B)\cdot(B=>A)}$. Пусть $(a_1,a_2, \ldots ,a_n)$ – произвольный набор из $N_{A<=>B}$. Отсюда следует, что $A(a_1,a_2, \ldots ,a_n)<=>B(a_1\ a_2,\ldots \ldots,a_n)=1$. Это возможно только в том случае, когда либо значения $A(a_1,a_2,\ldots \ldots ,a_n)$ и $B(a_1,a_2, \ldots ,a_n)$ истинны, либо ложны одновременно. Но в любом из этих случаев значение $(A(a_1, a_2, \ldots , a_n)=>B(a_1, a_2, \ldots , a_n))\ ( B(a_1,a_2, \ldots, \ldots a_n)=>A(a_1, a_2, \ldots , a_n))=1$, т.е. $(a_1, a_2, \ldots , a_n) \in N_{(A=>B)\cdot(B=>A)}$. Итак, требуемое тождество доказано. Отсюда следует справедливость отмеченной выше равносильности. Остальные равносильности доказываются аналогично. Теорема доказана.

### 7.2 Кванторные операции над предикатами

Операции отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность определяются аналогично как для предикатов, так и для высказываний. Однако в теории предикатов существуют операции, для которых нет аналогов в теории высказываний. Такими операциями над предикатами являются две кванторные операции – квантор общности и квантор существования. Известно, что если в одноместном предикате зафиксировать значение переменной, то мы получим высказывание.

Имеется еще один способ. Он основан на применении к предикату операций связывания квантором общности или квантором существования. Такие операции ставят в соответствие одноместному предикату высказывание, значение которого зависит от строения исходного предиката.

**Определение 11** Пусть $A(x)$ – одноместный предикат, определенный на множестве М. Обозначим через $\forall x\, A(x)$ высказывание, которое читается: «для всякого $x$ из $M$ справедливо $A(x)$», данное высказывание истинно только в том случае, когда предикат $A(x)$ тождественно истинный.

Символ $\forall x$ называется квантором общности по переменной $x$.

Например, пусть $A(x)=(x^2 \geq 0)$ одноместный предикат, определенный на множестве $R$. Тогда $\forall x\,(x^2 \geq 0)$ – истинное высказывание, которое читается: «квадрат любого действительно числа неотрицателен». Пусть $A(x)=(x > 2)$. Тогда $\forall x(x > 2)$ – ложное высказывание, которое читается: «любое действительное число больше $2$».

Следующая теорема показывает, что квантор общности можно рассматривать как обобщение конъюнкции.

**Теорема 6** *Пусть $A(x)$ – одноместный предикат, определенный на конечном множестве $M=\{ a_1,a_2, \dots ,a_n\}$, тогда $\forall x\, A(x) = A(a_1)\cdot A(a_2)\cdot \dots \cdot A(a_n)$.*

***Доказательство.*** Пусть $\forall x\, A(x) = 1$, тогда $A(x)\equiv 1$. Отсюда $A(a_i)=1$ для любого $a_i \in M$. Но тогда $A(a_1)\cdot A(a_2)\cdot \dots \cdot A(a_n)=1$. Пусть $\forall x\, A(x) = 0$, тогда $A(x)\neq 1$. А это значит, что существует $a_i$ из $M$, что $A(a_i)=0$. Но тогда $A(a_1)\cdot A(a_2)\cdot \dots \cdot A(a_n)=0$. Теорема доказана.

Квантор общности можно применять и к многоместным предикатам. Однократное применение квантора к одной из n переменных n-местного предиката порождает $(n-1)$ – местный предикат.

Пусть, например, мы имеем двухместный предикат $A(x,y)=(x > y)$, определенный на множестве $R$. Тогда $\forall x\, (x > y)$ задает одноместный предикат $B(y)$, зависящий от переменной y. Определим тип этого предиката. Возьмем произвольное действительное число $y_0$. Ясно, что
$B(y_0)= \forall x(x > y_0)=0$. Следовательно, $B(y)$ – тождественно ложный предикат.

Заметим, что к $(n-1)$-местному предикату $\forall x_1\, A(x_1,x_2, \dots ,x_n)$, зависящему от переменных $x_1, x_2,x_3, \dots ,x_n$, можно снова применять операцию связывания квантором общности по одной из свободных переменных. В результате получится $(n-2)$-местный предикат и т.д.

Пусть, например, мы имеем двухместный предикат $A(x,y)=(x+y > 2)$, определенный на $R$. Тогда $\forall x \forall y\, (x+y > 2)$ – ложное высказывание, которое читается: «сумма любых двух действительных чисел больше двух».

**Определение 12** Пусть $A(x)$ – одноместный предикат, определенный на множестве $M$. Обозначим $\exists x\, A(x)$ – высказывание, которое читается: «существует $x$ из $M$, что справедливо $A(x)$», данное высказывание ложно только в том случае, когда предикат $A(x)$ тождественно ложный.

Символ $\exists x$ называют квантором существования по переменной $x$.

Например, пусть предикат $A(x)=(x^2<0)$ определен на $R$. Тогда $\exists x\ (x^2<0)$ – ложное высказывание, которое читается: «существует действительное число, квадрат которого меньше $0$».

Следующая теорема показывает, что квантор существования можно рассматривать как обобщение дизъюнкции.

**Теорема 7** *Пусть $A(x)$ – одноместный предикат, определенный на конечном множестве $M=\{a_1,a_2, \dots ,a_n\}$. Тогда $\exists x\ A(x)=A(a_1)VA(a_2)\ V\dots VA(a_n)$.*

***Доказательство.*** Пусть $\exists x\ \ A(x)=0$. Тогда согласно определению 12 $A(x)$ – тождественно ложный предикат, а значит $A(a_i)=0$ для любого $a_i \in M$, но тогда $A(a_1)VA(a_2)\ V\dots VA(a_n)=0$. Пусть $\forall x\ \ A(x)=1$. Тогда $A(x)$ – не тождественно ложный предикат. А это значит, что найдется значение $a_i$ из $M$**,** что $A(a_i)=1$. Но тогда $A(a_1)V\,A(a_2)V\dots VA(a_n)=1$. Теорема доказана.

Квантор существования можно применять к многомерным предикатам. Однократное применение квантора к одной из $n$ переменных $a$-мерного предиката порождает $(n\text{-}1)$-мерный предикат.

Пусть, например, мы имеем двухместный предикат $A(x,y)=(x > y)$ определённый на множестве $R$. Тогда $\exists x(x > y)$ задает одноместный предикат $B(y)$, зависящий от переменной $y$. Данный предикат будет тождественно истинным. Действительно, пусть $y_0$ – произвольное фиксированное действительное число. Тогда $B(y_0)= \exists\ x(x > y_0)=1$.

Заметим, что если в многомерном предикате все переменные связаны кванторами, то он будет высказыванием.

Пусть $A(x,y)=(x+y > 1)$ двухместный предикат определённый на множестве $R$.

Тогда из него связыванием переменных $x$ и $y$ можно получить восемь высказываний:

1 $\forall x \forall y(x + y > 2)$ – “Для всяких действительных чисел $x$ и $y$ их сумма больше двух”.

2 $\forall y \forall x(x + y > 2)$ – “Для всяких действительных чисел $y$ и $x$ их сумма больше двух”.

3 $\exists x \exists y(x + y > 2)$ – “Существуют действительные числа $x$ и $y$, сумма которых больше двух”.

4 $\exists y \exists x(x + y > 2)$ – “Существуют действительные числа $y$ и $x$, сумма которых больше двух”.

5 $\forall x \exists y(x + y > 2)$ – “Для всякого действительного числа $x$ существует действительное число у, что их сумма больше двух”.

6 $\forall y \exists x(x + y > 2)$ – “Для всякого действительного числа $y$ существует действительное число $x$, что их сумма больше двух”.

7 $\exists x \forall y\ (x+y>2)$ – “Существует действительное число $x$, что для всякого действительного числа $y$ их сумма больше двух ”.

8 $x\ (x+y>2)$ – “Существует действительное число $y$, что для всякого действительного числа $x$ их сумма больше двух ”.

Нужно заметить, что высказывания 1 и 2 оба ложны и имеют один и тот же смысл; высказывания 3 и 4 оба истинны и имеют один и тот же смысл. Как видно, изменение порядка одноименных кванторов не влияет на смысл и значение истинности высказывания. Высказывание 5 истинно, а высказывание 8 ложно.

Высказывание 7 ложно, а высказывание 6 истинно. Как видно, изменение порядков разноименных кванторов приводит к изменению смысла и, возможно, значения истинности высказывания.

### 7.3 Формулы логики предикатов

Понятие формулы алгебры логики предикатов определим индуктивно.

Вначале задается алфавит символов, из которых будут составляться формулы.

1) предикатные переменные: $x, y, z, x_i, y_i, z_i\ (i \in N);$

2) нульместные предикатные переменные: $A, B, C, A_i, B_i, C_i$ $(i \in N)$;

3) $n$-мерные $(n > =1)$ предикатные переменные:

$$A(\ldots),\ B(\ldots),\ A_i(\ldots),\ B_i(\ldots) \quad (i \in N);$$

4) символы логических операций: $-$ , $\cdot$ , $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$;

5) кванторы: $\forall$, $\exists$.

**Определение 13**

1. Каждая нульместная предикатная переменная есть формула.

2. Если $A(\ldots)$ – $n$-местная предикатная переменная, то $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть формула, в которой все предикатные переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ свободны.

3. Если $F$ – формула, то $\overline{F}$ – также формула. Свободные (связанные) предметные переменные в формуле $\overline{F}$ те и только те, которые являются свободными (связанными в $F$).

4. Если $F_1$ и $F_2$ – формулы, и предметные переменные, входящие одновременно в обе эти формулы, свободны в каждой из них, то выражения $F_1 F_2$ , $F_1 \vee F_2$, $F_1 \Rightarrow F_2$, $F_1 \Leftrightarrow F_2$ также являются формулами.

5. Если $F$ – формула и x – предметная переменная, входящие в $F$ свободны, то выражения $\forall xF$ и $\exists xF$ также являются формулами, в которых переменная $x$ связанная и все остальные предметные переменные, входящие в формулу $F$ свободно или связанно остаются и в новых формулах соответственно такими же.

6. Других формул логики предикатов, кроме получающихся согласно пунктам 1–5, нет.

Например, $A(x,y)$ $B(z)$ – элементарные формулы, и

$\forall x\ A(x,y)$, $(\forall x B(x)) \vee ;\ \vee (\exists x\ A(x,y))$, $\forall x\ A(x,y) \Rightarrow B(y)$ – составные формулы.

Формулы, в которых все переменные связаны, называются замкнутыми, а формулы, содержащие свободные предметные переменные, – открытыми.

Примерами замкнутых формул являются

$$\forall x \forall y\, A(x,y),\ \forall x\, B(x) \Rightarrow \exists y\, A(y).$$

Если в формулу алгебры логики вместо каждой предикатной переменной подставить конкретный предикат, определенный на множестве *M*, то формула превращается в конкретный предикат, определенный на *M*. Причем, если формула замкнута, то после такой подстановки мы получаем высказывание. Если в исходной формуле были свободные переменные, то после такой подстановки мы получаем конкретный предикат от таких переменных. Если теперь вместо таких переменных подставить их конкретное значение, то мы опять получим высказывание.

Такое превращение формулы алгебры логики в высказывание называется интерпретацией этой формулы на множестве *M*.

Рассмотрим формулу $\forall x\ A(x,y) \Rightarrow \exists x\ A(x,y)$. В качестве *M* возьмем множество всех действительных чисел. В данную формулу вместо предикатной переменной $A(x,y)$ подставим конкретный предикат $x + y > 2$ определенный на *R*. Получаем $\forall x(x+y > 2) \Rightarrow \exists x(x+y > 2)$ предикат, зависящий от переменной *y*. Вместо *y* подставим любое конкретное значение $y_0$ из *F*.

Получаем высказывание $\forall x(x+y_0 > 2) \Rightarrow \exists x(x+y_0 > 2)$, так как
$\forall x(x+y_0 > 2)=0$, $\exists x(x+y_0 > 2)=1$.

Ясно, что предикат $\forall x(x+y >2) \Rightarrow \exists x(x+y_0 > 2)$ – тождественно истинный предикат.

**Определение 14** Формула алгебры логики предикатов называется выполнимой на множестве *M*, если при некоторой подстановке вместо предикатных переменных конкретных предикатов, определенных на этом множестве, она превращается в выполнимый предикат. Другими словами, формула выполнима на *M*, если существует истинная ее интерпретация на *M*.

Например, формула $\exists x A(x) \Rightarrow B(y)$ выполнима на множестве $R$. Действительно, подставляя в данную формулу вместо предикатных переменных конкретные предикаты $(x > 2), (y < 3)$, получаем предикат $\exists x(x > 2) \Rightarrow (y < 3)$ зависящий от $y$. Данный предикат выполнимый. Действительно, пусть $y=2$. Ясно, что высказывание $\exists x(x > 2) \Rightarrow (2 < 3)$ истинно.

**Определение 15** Формула алгебры логики предикатов называется тождественно истинной (тождественно ложной) на множестве $M$, если при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, заданных на этом множестве, она превращается в тождественно истинный (тождественно ложный) предикат.

**Определение 16** Формула алгебры логики предикатов называется тавтологией (противоречием), если при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, заданных на каких угодно множествах, она превращается в тождественно истинный (тождественно ложный) предикат.

Покажем, что формула $\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x)$ является тавтологией. Пусть $A(x)$ – любой конкретный предикат, определенный на любом множестве $M$. Покажем, что после такой подстановки в формулу мы получаем истинное высказывание.

Предположим противное $\forall x A(x) \Rightarrow \exists x A(x)=0$. Тогда $\forall x A(x)=1$ и $\exists x A(x)=0$.

Отсюда следует, что $A(x) \equiv 1$ и $A(x) \equiv 0$ одновременно, что невозможно.

Покажем, что формула $\overline{A(x)} \cdot (\forall y A(y))$ является противоречием. Предположим, что это не так. Тогда найдется конкретный предикат $A(x)$, определенный на конкретном множестве $M$, после подстановки которого в исходную формулу мы получаем выполнимый предикат на множестве $M$. А это значит, что найти значение $a$ из $M$, что $\overline{A(a)} \cdot (\forall y A(y))=1$. Но тогда

$\overline{A(a)}=1$ и $\forall y A(y)=1$. Отсюда следует, что $A(a)=0$ и $A(y)$ – тождественно истинный предикат на $M$, одновременно. Получили противоречие.

Нахождение тавтологий является одной из важнейших задач логики предикатов. В алгебре высказываний существует алгоритм, позволяющий выяснить, является ли формула алгебры высказываний тождественно истинной или нет. Для этого нужно составить таблицу истинности формулы. Если последний столбец состоит только из единиц, то формула тождественно истинна. Аналогичная проблема о существовании такого алгоритма возникает и для формул алгебры логики предикатов. В 1936 году американским математиком А. Чёрчем было доказано, что такого алгоритма не существует. Каждая форма подлежит изучению индивидуальным методом на тождественную истинность. Тем не менее, для некоторых частных видов формул данная проблема допускает решение, в частности, для формул алгебры логики предикатов, определённых на конечных множествах.

Действительно, пусть формула алгебры логики предикатов задана на конечном множестве. Тогда вместо её предикатных переменных могут подставляться конкретные предикаты, определённые на этом множестве. Согласно теоремам 6 и 7 операции квантификации на конечном множестве сводятся к конъюнкции и дизъюнкции. Следовательно, задача о том является ли формула тавтологией, сводится к аналогичной задаче для алгебры высказываний, которая эффективно разрешима.

### 7.4 Равносильные преобразования формул

**Определение 17** Две формулы $F_1$ и $F_2$ алгебры логики предикатов называются равносильными на множестве $M$, если при любой подстановке в эти формулы вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, определённых на множестве $M$, формулы превращаются в равносильные предикаты. Если две формулы равносильны на любых множествах, то их будем называть просто равносильными и обозначать $F_1 = F_2$.

В следующих теоремах приводятся наиболее важные равносильные формулы алгебры логики предикатов.

**Теорема 8 (законы де Моргана для кванторов)** *Следующие формулы алгебры логики предикатов равносильны:*

1) $\overline{\forall x A(x)} = \exists x \overline{A(x)}$;

2) $\overline{\exists x A(x)} = \forall x \overline{A(x)}$;

***Доказательство.*** 1) Пусть *A(x)* – произвольный конкретный одноместный предикат, определённый на произвольном множестве *M*. Тогда $\overline{\forall x A(x)}$ и $\exists x \overline{A(x)}$ – высказывания.

Пусть $\overline{\forall x A(x)}$=1. Тогда $\forall x A(x)$=0. Отсюда следует, что $A(x)\not\equiv 1$. А это значит, что $\overline{A(x)}\not\equiv 0$. Теперь согласно определению 12 $\exists x \overline{A(x)}$=1.

Пусть $\overline{\forall x A(x)}$=0. Тогда $\forall x A(x)$=1. Отсюда следует, что $A(x)\equiv 1$. А это значит, что $\overline{A(x)}\equiv 0$. Теперь, согласно определению 12 $\exists x \overline{A(x)}$=0.

Доказательство определения 2) приводится аналогично.

**Следствие.** Следующие формулы алгебры логики предикатов равносильны:

$$\forall x A(x) = \overline{\exists x \overline{A(x)}}$$

$$\exists x A(x) = \overline{\forall x \overline{A(x)}}$$

Действительно, согласно теореме 8 и закону двойного отрицания получаем $\overline{\exists x \overline{A(x)}} = \forall x \overline{\overline{A(x)}} = \forall x A(x)$.

**Теорема 9 (законы пронесения кванторов через конъюнкцию)** *Следующие формулы алгебры логики предикатов равносильны :*

1) $\forall$ x($A(x)\cdot B(x)$)=( $\forall xA(x))\cdot(\forall xB(x)$);

2) $\exists x(A(x)\cdot P)=(\exists xA(x))\cdot P$.

***Доказательство.*** 1) Пусть *A(x),B(x)* – произвольные одноместные предикаты, определённые на произвольном множестве *M*. Пусть $\forall x(A(x)\cdot B(x))$=1. Тогда $A(x)\cdot B(x)\equiv 1$. Согласно следствию из теоремы 2

$A(x) \equiv 1$ и $B(x) \equiv 1$ одновременно. Согласно определению 11 $\forall xA(x) = 1$ и $\forall xB(x) = 1$. А это значит, что $(\forall xA(x))\cdot(\forall xB(x)) = 1$.

Пусть теперь $\forall x(A(x)\cdot B(x)) = 0$. Тогда согласно определению 11 $A(x)\cdot B(x) \not\equiv 1$. Согласно следствию из теоремы 2 либо $A(x) \not\equiv 1$, либо $B(x) \not\equiv 1$. Но тогда согласно определению 11 либо $\forall xA(x) = 0$, либо $\forall xB(x) = 0$. А это значит, что $(\forall xA(x))\cdot(\forall xB(x)) = 0$.

2) Пусть $A(x)$ – произвольный конкретный одноместный предикат, определённый на множестве $M$, а $P$ – произвольное конкретное высказывание.

Пусть $\exists x(A(x)\cdot P) = 1$. Согласно определению 12 $A(x)\cdot P \not\equiv 0$. Отсюда нетрудно заметить, что $A(x) \not\equiv 0$ и $P=1$. Тогда согласно определению 12 $\exists xA(x) = 1$. А это значит, что $(\exists xA(x))\cdot P = 1$.

Пусть $\exists x(A(x)\cdot P) = 0$. Тогда согласно определению 12 $A(x)\cdot P \equiv 0$. Но тогда либо $A(x) \equiv 0$, либо $P = 0$. А это значит, что либо $\exists xA(x) = 0$, либо $P = 0$. Отсюда следует, что $(\exists xA(x))\cdot P = 0$. Теорема доказана.

Покажем, что квантор общности через дизъюнкцию проносить нельзя, т.е. $\forall x(A(x) \vee B(x)) \neq (\forall xA(x)) \vee (\forall xB(x))$.

Действительно, пусть $A(x)$ – «$x$ нечётное число», а $B(x)$ – «$x$ чётное число» два предиката, определённые на множестве натуральных чисел. Тогда $\forall x(A(x)\vee B(x))$ – истинное высказывание «любое натуральное число либо чётно, либо нечётно». $\forall xA(x) \vee \forall xB(x)$ – ложное высказывание «любое натуральное число нечётно или натуральное число чётно».

**Теорема 10 (законы пронесения кванторов через дизъюнкцию)** *Следующие формулы алгебры логики предикатов равносильны:*

1) $\exists x(A(x) \vee B(x)) = (\exists xA(x)) \vee (\exists xB(x))$;

2) $\forall x(A(x) \vee P) = (\forall xA(x)) \vee P$;

***Доказательство.*** Пусть *A(x), B(x)* – произвольные конкретные одноместные предикаты, определённые на произвольном множестве *M*, а *P* – произвольное конкретное высказывание.

1) Пусть $\exists x(A(x)\vee B(x))=1$. Тогда $A(x)\vee B(x)\not\equiv 0$. Согласно следствию из теоремы 3 либо $A(x)\not\equiv 0$, либо $B(x)\not\equiv 0$ одновременно. Согласно определению 12 либо $\exists xA(x)=1$, либо $\exists xB(x)=1$. А это значит, что $\exists xA(x)\vee\exists xB(x)=1$.

Пусть теперь $\exists x(A(x)\vee B(x))=0$. Тогда согласно определению 12 $A(x)\vee B(x)\equiv 0$. По следствию из теоремы 3 $A(x)\equiv 0$ и $B(x)\equiv 0$. Согласно определению 12 $\exists xA(x)=0$ и $\exists xB(x)=0$. А это значит, что $\exists xA(x)\vee\exists xB(x)=0$.

2) Пусть $\forall x(A(x)\vee P)=1$. Тогда согласно определению 11 $A(x)\vee P\equiv 1$. А это значит, что либо $A(x)\equiv 1$, либо $P=1$. Отсюда либо $\forall xA(x)=1$, либо $P=1$. В любом случае $\forall xA(x)\vee P=1$.

Пусть теперь $\forall x(A(x)\vee P)=0$. Тогда согласно определению 11 $A(x)\vee P\not\equiv 1$. Отсюда следует, что $P$=0 и $A(x)\not\equiv 1$. Но тогда $P=0$ и $\forall xA(x)=0$. Следовательно, $\forall xA(x)\vee P=0$. Теорема доказана.

Покажем, что квантор существования через конъюнкцию проносить нельзя, т. е. $\exists x(A(x)\cdot B(x))\neq(\exists xA(x))\cdot(\exists xB(x))$.

Пусть $A(x)=(x>2)$, определённый на $R$ и $B(x)=(x<2)$, определённый на R. Тогда $\exists xA(x)=1$ и $\exists xB(x)=1$. Следовательно, $(\exists xA(x))\cdot(\exists xB(x))=1$. Очевидно, что $\exists x((x>2)\cdot(x<2))=0$.

**Теорема 11 (законы пронесения кванторов через импликацию)** *Следующие формулы алгебры логики предикатов равносильны :*

1) $\forall x(A(x)\Rightarrow P)=(\exists xA(x))\Rightarrow P$;

2) $\exists x(A(x)\Rightarrow P)=(\forall xA(x))\Rightarrow P$;

3) $\forall x(P \Rightarrow A(x)) = P \Rightarrow (\forall x A(x))$;

4) $\exists x(P \Rightarrow A(x)) = P \Rightarrow (\exists x A(x))$;

***Доказательство.*** Пусть *A(x)* – произвольный конкретный одноместный предикат, определённый на множестве *M*, а *P* – произвольное конкретное высказывание.

1) Пусть $\forall x(A(x) \Rightarrow P) =$ 1. Тогда согласно определению 11 $A(x) \Rightarrow P \equiv 1$. Отсюда нетрудно показать, что либо *A(x)* $\equiv 0$, либо $P = 1$. А это значит, что либо $\exists x A(x)$ = 0, либо $P$ = 1. В любом из этих случаев $(\exists x A(x)) \Rightarrow P = 1$.

Пусть теперь $\forall x(A(x) \Rightarrow P)$ = 0. Тогда согласно определению 11 $A(x) \Rightarrow P \not\equiv 1$. А это значит, что *A(x)* $\not\equiv$ 1 и $P = 0$. Тогда $\exists x A(x) = 1$ и $P = 0$. Отсюда $(\exists x A(x)) \Rightarrow P = 0$.

2) Пусть $\exists x(A(x) \Rightarrow P) = 1$. Тогда согласно определению 11 $A(x) \Rightarrow P \not\equiv 0$. Тогда либо $P$ = 1, либо *A(x)* $\not\equiv$ 1. В любом случае $(\forall x A(x)) \Rightarrow P = 1$.

Пусть теперь $\exists x(A(x) \Rightarrow P) =$ 0. Тогда согласно определению 12 $A(x) \Rightarrow P \equiv 0$. А это значит, что *A(x)* $\equiv$ 1 и $P = 0$. Отсюда $\forall x A(x) = 1$ и $P = 0$. А это значит, что $(\forall x A(x)) \Rightarrow P = 0$.

3) Пусть $\forall x(P \Rightarrow A(x)) = 1$. Тогда согласно определению 11 $P \Rightarrow A(x) \equiv 1$. Отсюда либо $P = 0$, либо *A(x)* $\not\equiv$ 1. Следовательно, либо $P = 0$, либо $\forall x A(x) = 1$. В любом случае $P \Rightarrow (\forall x A(x)) = 1$.

Пусть теперь $\forall x(P \Rightarrow A(x)) =$ 0. Тогда согласно определению 11 $P \Rightarrow A(x) \not\equiv 1$. Тогда $P = 1$ и *A(x)* $\not\equiv$ 1. Отсюда $P = 1$ и $\forall x A(x) = 0$. Следовательно $P \Rightarrow (\forall x A(x)) = 0$.

4) Пусть $\exists x(P \Rightarrow A(x)) =$ 1. Тогда согласно определению 12 $P \Rightarrow A(x) \not\equiv 0$. Отсюда либо $P = 0$, либо *A(x)* $\not\equiv$ 0. Следовательно, либо

$P = 0$, либо $\exists x A(x)$=1. А это значит, что существует $P \Rightarrow (\exists x A(x)) = 1$.

Пусть теперь $\exists x(P \Rightarrow A(x)) = 0$. Тогда согласно определению 12 $P \Rightarrow A(x) \equiv 0$. Отсюда $P = 1$ и $A(x) \equiv 0$. Следовательно $P = 1$ и $\exists x A(x) = 0$. А это значит, что $P \Rightarrow (\exists x A(x)) = 0$. Теорема доказана.

**Теорема 12 (законы коммутативности для кванторов):***Следующие формулы алгебры логики предикатов равносильны:*

1) $\forall x \forall y A(x, y) = \forall y \forall x A(x, y)$;

2) $\exists x \exists y A(x, y) = \exists y \exists x A(x, y)$.

Доказательство непосредственно следуют из определений 11 и 12.

**Пример 1** Доказать, что следующая формула

$\forall x \left(A(x) \Rightarrow \overline{B(x)}\right) \Rightarrow \exists x\, A(x) \overline{\forall x\, B(x)}$ является тавтологией.

***Доказательство.*** Пусть $A(x)$ и $B(x)$ — произвольные конкретные предикаты, определённые на множестве $M$. Подставим их в исходную формулу, в результате получим высказывание. Покажем, что данное высказывание истинно.

**Способ 1** Предположим противное. Пусть

$\forall x \left(A(x) \Rightarrow \overline{B(x)}\right) \Rightarrow \overline{\exists x\, A(x) \cdot \forall x\, B(x)} = 0.$

Согласно определению импликации:

$\begin{cases} \forall x \left(A(x) \Rightarrow \overline{B(x)}\right) = 1, \\ \overline{\exists x\, A(x) \cdot \forall x\, B(x)} = 0; \end{cases}$ Отсюда следует, что $\begin{cases} A(x) \Rightarrow \overline{B(x)} \equiv 1, \\ \exists x\, A(x) \cdot \forall x\, B(x) = 1; \end{cases}$

Тогда

$\begin{cases} A(x) \Rightarrow \overline{B(x)} \equiv 1, \\ \exists x\, A(x) = 1, \\ \forall x\, B(x) = 1; \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} A(x) \Rightarrow \overline{B(x)} \equiv 1, \\ A(x) \equiv 0, \\ B(x) \equiv 1. \end{cases}$ Но тогда $\begin{cases} A(x) \Rightarrow \overline{B(x)} \equiv 1, \\ A(x) \equiv 0, \\ \overline{B(x)} \equiv 0. \end{cases}$

Отсюда следует, что существует такое значение $x_0$ из $M$, что

$$\begin{cases} A(x_0) \Rightarrow \overline{B(x_0)} = 1, \\ A(x_0) = 1, \\ \overline{B(x_0)} = 0. \end{cases}$$

Получим противоречие. Следовательно, искомая формула является тавтологией.

**Способ 2** Известно, что $A(x) \Rightarrow \overline{B(x)} = \overline{A(x)} \vee \overline{B(x)}$.

$$\overline{\forall\, x\, A(x)} = \exists\, x\ \overline{A(x)},$$
$$\overline{\exists\, x\, A(x)} = \forall\, x\ \overline{A(x)},$$
$$\overline{A(x) \cdot B(x)} = \overline{A(x)} \vee \overline{B(x)}.$$

Тогда

$$\forall\, x\ \left(A(x) \Rightarrow \overline{B(x)}\right) \Rightarrow \overline{\exists\, x\, A(x) \forall\, x\, B(x)} =$$
$$= \overline{\forall\, x\ \left(\overline{A(x)} \vee \overline{B(x)}\right)} \vee \left(\forall\, x\ \overline{A(x)} \vee \exists\, x\ \overline{B(x)}\right) =$$
$$= \exists\, x\ \left(A(x) \cdot B(x)\right) \vee \exists\, x\ \overline{B(x)} \vee \forall\, x\ \overline{A(x)} =$$
$$= \exists\, x\ \left(A(x) \cdot B(x) \vee \overline{B(x)}\right) \vee \forall\, x\ \overline{A(x)} =$$
$$= \exists\, x\ \left(A(x) \vee \overline{B(x)}\right) \vee \forall\, x\ \overline{A(x)} =$$
$$= \exists\, x\, A(x) \vee \exists\, x\ \overline{B(x)} \vee \overline{\exists\, x\, A(x)} = 1.$$

**Вопросы для самоконтроля**

1 Дайте определение $n$-местного предиката.

2 Дайте определение тождественно истинного предиката, приведите примеры.

3 Дайте определение тожественно ложного предиката, приведите примеры.

4 Дайте определение выполнимого предиката, приведите примеры.

5 Дайте определение операции применения квантора общности.

6 Дайте определение операции применения квантора существования.

7 Дайте определение формулы логики предикатов.

8 Что называется интерпретацией формулы логики предикатов?

9 Какие формулы логики предикатов называются замкнутыми?

10 Какие формулы логики предикатов называются открытыми?

11 Дайте определение выполнимой формулы логики предикатов.

12 Дайте определение тавтологии.

13 Дайте определение противоречия.

14 Что можно сказать о проблеме разрешимости в алгебре логики предикатов?

15 Какие формулы алгебры логики предикатов называются равносильными?

16 Сформулируйте законы де Моргана для кванторов.

17 Сформулируйте законы пронесения кванторов через конъюнкцию.

18 Сформулируйте законы пронесения кванторов через дизъюнкцию.

19 Сформулируйте законы пронесения кванторов через импликацию.

20 Сформулируйте законы коммутативности для кванторов.

## ТЕМА 8 КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ

8.1 Детерминированные функции

8.2 Графическое задание детерминированных функций

8.3 Ограниченно-детерминированные функции

8.4 Каноническое уравнение ограниченно-детерминированных функций

Автоматом называют дискретный преобразователь информации, способный принимать различные состояния, переходить под воздействием входных сигналов из одного состояния в другое и выдавать выходные сигналы.

Если множество состояний автомата, а также множество входных и выходных сигналов конечны, то автомат называют конечным автоматом. Все реальные автоматы являются конечными.

Информацию, поступающую на вход автомата, и преобразующую входную информацию принято кодировать конечной совокупностью символов. Эту совокупность называют алфавитом, отдельные символы, образующие алфавит, – буквами, а любые конечные упорядоченные последовательности букв данного алфавита – словами в этом алфавите.

Автоматы функционируют в дискретные моменты времени, которые обозначаются натуральными числами $t = 0, 1, 2,\ldots$. В каждый момент дискретного времени на вход автомата поступает один сигнал (буква), фиксируется определённое состояние автомата и с выхода снимается один сигнал. Реальные автоматы могут иметь, вообще говоря, несколько входов и выходов. В некоторых случаях для решения задач синтеза удобно заменить такие автоматы автоматами с одним входом и одним выходом. Для этого достаточно закодировать соответствующим образом входные и выходные сигналы исходного алфавита. Если, например, автомат имеет два входа, на каждый из которых подаются сигналы 0 или 1, то все возможные комбинации входных сигналов можно закодировать четырьмя буквами

(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1).

Процесс дискретного преобразования информации автоматами можно описать с помощью детерминированных функций.

### 8.1 Детерминированные функции

Обозначим через $E^K$={0, 1, …, k-1}, где k – некоторое натуральное число, а через $E_K$ множество всех k-значных последовательностей *a* таких, что *a* = {*a*(1), *a*(2),…,*a*(t), …}, где *a*(i)$\in E^K$ для всех I = 1, 2,… .

Обозначим через $P^K$ множество всех функций $y = f\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определённых на наборах $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_i \in E_K, i = 1,2,\ldots,n$ и принимающих значение из $E_K$. Функции из $P^K$ преобразуют наборы k-значных последовательностей в k-значные последовательности. В множество $P^K$ включим также все последовательности из $E^K$, рассматривая их как функции, зависящие от пустого множества переменных, т. е. как константы.

С помощью векторной записи функции от *n* переменных из $P^K$ можно свести к функции от одной переменной. Обозначим набор переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ через X, вместо $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем писать $y = f$(X). При этом значение переменной X, есть вектор *a* = $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ компонентами которого являются последовательности из $E_K$,

$a_i = \{a_i(1), a_i(2), \ldots, a_i(t), \ldots\}, i = 1,2,\ldots,n$. Будем рассматривать *a* как последовательность векторов $a_i = \{a_i(1), a_i(2), \ldots, a_i(t), \ldots\}$, где

$a(i) = (a_1(i), a_2(i), \ldots, a_n(i)), i = 1,2,\ldots$.

Таким образом, мы будем считать, что выполняется тождество:

$$(\{a_1(1), a_1(2), \ldots, a_1(t), \ldots\}, \{a_2(1), a_2(2), \ldots, a_2(t), \ldots\}, \ldots, \{a_n(1), a_n(2), \ldots, a_n(t), \ldots\}) =$$

$$= \{(a_1(1), a_2(1), \ldots, a_n(1)), (a_1(2), a_2(2), \ldots, a_n(2)), \ldots, (a_1(t), a_2(t), \ldots, a_n(t)), \ldots\}.$$

**Лемма 1** Число наборов $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \in \{0,1,\ldots,k-1\}, i = 1,2,\ldots,n$ равно $k^n$.

Итак, функцию $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P^K$ с помощью векторной записи можно свести к функции $y = f(X) \in P^N$, где $N = k^n$. Таким образом, изучение функции $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из $P^K$ можно свести к изучению функции от одной переменной из $P^N$, где $N = k^n$.

**Определение 1** Функция $y = f(X)$ из $P^N$ называется детерминированной, если каково бы ни было число *t* и каковы бы ни были последовательности *a* и *b* такие, что *a(1)=b(1), a(2)=b(2), … a(t)=b(t)* значения функций *α, β, где α=*$f(a)$*,* β=$f(b)$ представляют собой последовательности, у которых тоже совпадают первые *t* членов, т. е. α(1) = β(1), α(2) = β(2), …, α(t) = = β(t).

Множество всех детерминированных функций обозначим через $P_g^K$.

Из определения детерминированной функции следует, что значение α*(t)* (α=$f(a)$) зависит только от значения первых *t* членов входной последовательности a, т. е. *a(1), a(2), …, a(t),* следовательно *α(t)=φ(a(1), a(2), …, a(t)).*

Приведём примеры как детерминированных, так и недетерминированных функций.

**Пример 1** Рассмотрим функцию $y = f(x) \in P^2$, определённую следующим образом $f(a) = \begin{cases} (0,0\ldots), \text{если} \quad a = (0,0,\ldots) \\ (1,1,\ldots), \text{если} \quad a \neq (0,0,\ldots) \end{cases}$

Покажем, что данная функция недетерминированная. Действительно, возьмём две входные последовательности $a_1 = (0,0,0,\ldots)$ и $a_2 = (0,0,1,\ldots)$. Тогда $f(a_1) = (0,0,0,\ldots)$ и $f(a_2) = (1,1,1,\ldots)$. Следовательно, данная функция недетерминированная.

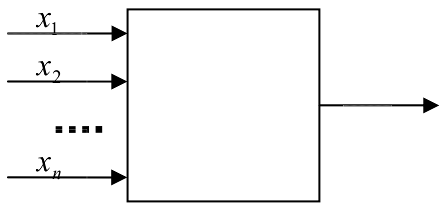
**Пример 2** Рассмотрим функцию $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ из $P^2$, определённую следующим образом $f(x_1, x_2) = \{x_1(1) \cdot x_2(1), x_1(2) \cdot x_2(2), \ldots, x_1(t) \cdot x_2(t), \ldots\}$.Здесь выходная последовательность – почленная конъюнкция входных последовательностей. Очевидно, что $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 \in P_g^{\,2}$.

**Пример 3** Рассмотрим функцию z = $x$ + y$\in P^2$, осуществляющую сложение 2-значных последовательностей в двоичной системе с бесконечным числом разрядов. Для этого используется обычный алгоритм сложения двух чисел столбиком

$$\begin{array}{r} \ldots x(3), x(2), x(1) \\ + \\ \ldots y(3), y(2), y(1) \\ \hline \ldots z(3), z(2), z(1). \end{array}$$

Очевидно, что *z(t)* определяется по первым *t* слагаемых, т. е. $x$ + y$\in P_g^{\,2}$.

Детерминированная функция $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ может быть проинтерпретирована следующим образом. Пусть мы имеем некоторый «дискретный преобразователь», в котором существует *n* входов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и один выход $f$.




На входы в моменты времени *t=1,2,…,m*, … подаются входные последовательности

$$\begin{aligned} a_1 &= \{a_1(1), a_1(2), \ldots, a_1(t), \ldots\}; \\ a_2 &= \{a_2(1), a_2(2), \ldots, a_2(t), \ldots\}; \\ &\ldots \\ a_n &= \{a_n(1), a_n(2), \ldots, a_n(t), \ldots\}. \end{aligned}$$

И в эти же моменты *t* на выходе возникает выходная последовательность $\alpha = \{\alpha(1), \alpha(2), \ldots, \alpha(t), \ldots\}$, причем $\alpha = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Очевидно, что в дискретном преобразователе значения *α(t)* зависит только от значений входных последовательностей в момент времени *1,2,…,t* и не зависит от значений в будущие моменты времени. Поэтому преобразование $f$ есть детерминированная функция.

## 8.2 Графическое задание детерминированных функций

Пусть $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P_D{}^K$. Выше мы показали, что с помощью векторной записи данную функцию можно свести к функции $y = f(X) \in P_D^N$, где $N = k^n$. Рассмотрим бесконечную фигуру (рисунок 1):

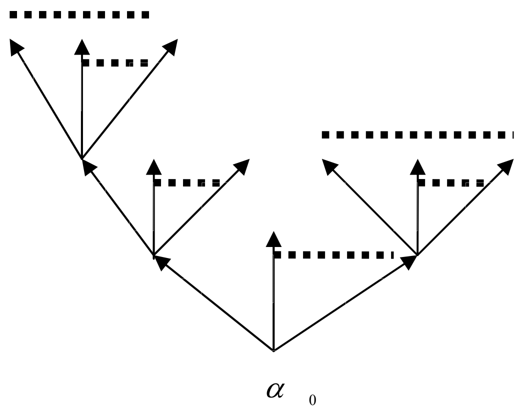


Рисунок 1

Называть её будем деревом, и построена она следующим образом. Возьмём произвольную вершину $\alpha_0$, которую назовём корнем дерева. Из неё проведём N рёбер, которые образуют первый ярус. Из концов каждого из рёбер также проведём N рёбер, которые образуют второй ярус и т. д. Рёбра каждого пучка нумеруются слева направо числами 0, 1,…, N-1 или их значениями в k-ичной системе счисления.

В дальнейшем на рисунках номера рёбер будут опускаться. Далее, каждому ребру в построенном дереве произвольным образом припишем одно из чисел множества {0, 1,…, k-1}. В результате получим так называемое нагруженное дерево.

Рассмотрим следующее нагруженное дерево (рисунок 2):

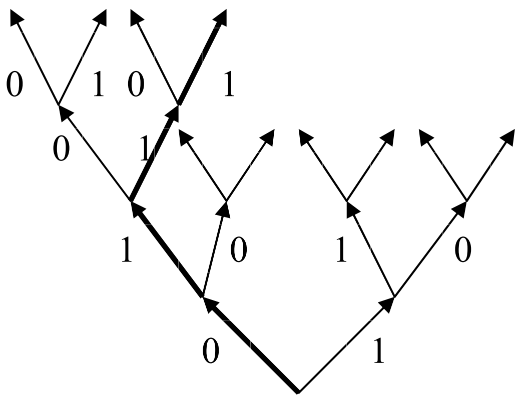



Рисунок 2

Начиная движение с корня дерева, пойдём по рёбрам. Так, например, последовательности (0, 0, 1, 1…), где числа 0, 0, 1, 1, … – номера рёбер, соответственно, 1-го,2-го,3-го,4-го и т. д. ярусов соответствует выделенный маршрут и последовательность (0, 1, 1, 1…).

**Теорема 1** *Функция из* $P^k$ *будет детерминированной тогда и только тогда, когда она может быть заданна с помощью нагруженного дерева.*

***Доказательство.*** Покажем, что любое нагруженное дерево задает некоторую детерминированную функцию. Действительно, пусть $\{a(1), a(2), \dots, a(t), \dots\}$ – произвольная последовательность чисел, где $a(i) \in E^K$, I = 1, 2,…. Будем считать, что $a(1)$ – номер ребра 1-го яруса, $a(2)$ – номер ребра 2-го яруса и т. д. Данной последовательности в нагруженном дереве соответствует единственный маршрут, ведущий из корня дерева. Числа, приписанные выделенным ребрам образуют выходную последовательность $\{b(1), b(2), \dots, b(t), \dots\}$. Покажем, что построенная функция из $P^K$ является детерминированной. Пусть $\{a_1(1), a_1(2), \dots, a_1(t), \dots\}$ и $\{a_2(1), a_2(2), \dots, a_2(t), \dots\}$ – две входные последовательности такие, что $a_1(1) = a_2(1), a_1(2) = a_2(2), \dots, a_1(t) = a_2(t)$.

Ясно, что маршруты в нагруженном дереве, соответствующие данным последовательностям на первых *t* ярусах совпадают. А это значит, что $b_1(1) = b_2(1), b_1(2) = b_2(2), \dots, b_1(t) = b_2(t)$, т. е. функция детерминированная. Обратное утверждение очевидно. Теорема доказана.

Рассмотрим следующие примеры:

**Пример 4** $f(x)=\bar{x}\in P^2$. Ясно, что $f(x)=\bar{x}\in P_D^2$ и число ребер, выходящих из вершин равно $N=2^1$. Построим дерево соответствующее данной функции (рисунок 3):

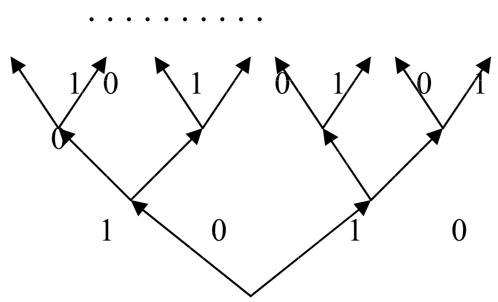



Рисунок 3

Например, входной последовательности $\{0, 1, 1, \ldots\}$ будет соответствовать входная последовательность $\{1, 0, 0, \ldots\}$.

**Пример 5** $f(x,y)=x\cdot y \in P_D^2$, которая задаётся следующим образом.

$f(x,y)=\{x(1)\cdot y(1), x(2)\cdot y(2), \ldots, x(t)\cdot y(t), \ldots\}$, где $x$(t)·y(t) – конъюнкция.

Для данной функции k=n=2 и число ребер, выходящих из вершин равно N = $2^2$ = 4. Ребру с номером D = (0,0) соответствует значение (0,0) = 0

1 = (0,1)  0·1 = 0

2 = (1,0)  1·0 = 0

3 = (1,1)  1·1 = 1.

Следовательно, данной функции соответствует следующее нагруженное дерево (рисунок 4):

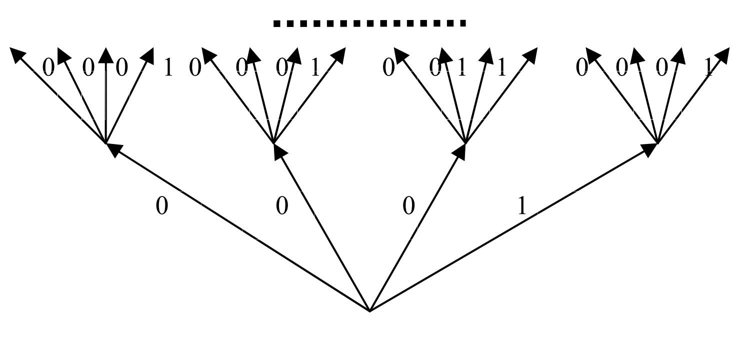



Рисунок 4

**Пример 6** $f(z)=x+y \in P_D^2$, k = n = 1, N = 1² = 1.

$$z(t)=\begin{cases} x(t)=y(t) \pmod 2 & \textit{при отсутствии переноса} \\ x(t)+y(t)+1 \pmod 2 & \textit{при наличии переноса} \end{cases}.$$

Дерево, соответствующее данной функции строится следующим образом. Процесс приписывания ребрам чисел начинается с 1-го яруса

0 = (0,0)        0+0=0

1 = (0,1)        0+1=1

2 = (1,0)        1+0=1

3 = (1,1)        1+1=0

При этом, если появляется перенос в следующий разряд, то конец соответствующего ребра кончается кружочком. Это позволяет выполнить вычисление в следующем ярусе (рисунок 5):

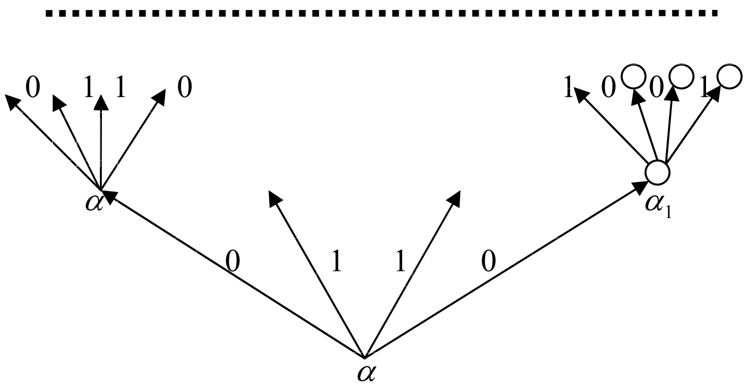



Рисунок 5

### 8.3 Ограниченно-детерминированные функции

Возьмем нагруженное дерево для некоторой детерминированной функции $f(X)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Пусть $\alpha$ – произвольная его вершина $n$-го яруса. Данную вершину можно рассматривать как корень нагруженного дерева. Согласно теореме 1 оно определяет некоторую детерминированную функцию $f^{\alpha}(X)$.

**Определение 2** Два поддерева с корнями $\alpha_1$ и $\alpha_2$ исходного дерева называются эквивалентными, если $f^{\alpha 1}(X)=f(X)^{\alpha 2}$.

Очевидно, что при естественном наложении двух эквивалентных поддеревьев их нумерации совпадают. Так, в дереве (рис.3 и рис.4) все поддеревья эквивалентны, а в дереве (рис.5) поддеревья с корнями $\alpha$ эквивалентны, а с корнями $\alpha$ и $\alpha_1$ не эквивалентны.

**Определение 3** Весом дерева и весом соответствующей детерминированной функции называется максимальное число попарно неэквивалентных поддеревьев.

Например, все функции из примеров 4, 5 равны 1, а из примера 6 равны 2.

**Определение 4** Детерминированная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ограниченно – детерминированной функцией, если она имеет конечный вес.

Класс всех ограниченно – детерминированных функций обозначим через $P^K_{O.D.}$

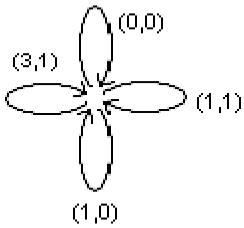
Функции из примеров 4, 5, 6 являются ограниченно-детерминированными функциями.

Рассмотрим следующую детерминированную функцию.

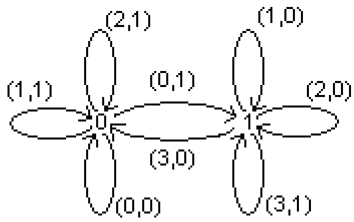
**Пример 7** $f(x) = \{0,1,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,1\ldots\} \in P^2_D$. Ясно, что вес данной функции $r = \infty$, т. е. она не является ограниченно-детерминированной.

Пусть $f(X) \in P^K_{O.D.}$, вес которой равен r. Рассмотрим алфавит $Q = \{q(0), q(1), \ldots, q(r-1)\}$, который назовём внутренним алфавитом. Каждой вершине нагруженного дерева, соответствующей функции $f(X)$ припишем одну из букв алфавита $Q$ с соблюдением следующего правила: эквивалентным вершинам приписываются одни и те же буквы из $Q$. В результате получаем так называемое полное нагруженное дерево.

Для любой ограниченно – детерминированной функции соответствующее ей полное нагруженное дерево можно свести к конечному дереву с занумерованными ребрами и вершинами. Если в нем провести отождествление эквивалентных вершин, то получим так называемую диаграмму Мура. В ней нулём отмечена начальная вершина и ребрам приписаны пары чисел (a, b), первое из которых обозначает номер ребра, а второе, чем данное ребро нагружено. Так функция $f(x,y) = x \cdot y \in P^2_{O.D.}$ соответствует диаграмме Мура.




А функция $z = x + y \quad \in P^2_{O.D.}$




## 8.4 Каноническое уравнение ограниченно-детерминированных функций

Пусть $y = f(x)$ – ограниченно-детерминированная функция с весом *r*.

Пусть $x = \{x(1), x(2), \ldots, x(t), \ldots\}$ – входная последовательность. Ей соответствует выходная последовательность $y = \{y(1), y(2), \ldots, y(t), \ldots\}$ и последовательность состояний $q = \{q(1), q(2), \ldots, q(t), \ldots\}$.

Возьмем другую входную последовательность $x' = \{x'(1), x'(2), \ldots, x'(t), \ldots\}$. Ей соответствуют, выходная последовательность и последовательность состояний

$y' = \{y'(1), y'(2), \ldots, y'(t), \ldots\}$;

$q' = \{q'(1), q'(2), \ldots, q'(t), \ldots\}$.

В общем случае из того, что $x(t) = x'(t)$ не следует, что $y(t) = y'(t)$. Однако, если $x(t) = x'(t)$ и $q(t-1) = q'(t-1)$, то $y(t) = y'(t)$ и $q(t) = q'(t)$. Другими словами это означает, что если два одноименных ребра ($x(t) = x'(t)$) выходят из эквивалентных вершин ($q(t-1) = q'(t-1)$), то они будут нагружены одной и той же буквой ($y(t) = y'(t)$) и будут входить в эквивалентные вершины ($q(t) = q'(t)$). Это означает, что

$$\begin{cases} y(t) = \Phi(x(t), q(t-1)) \\ q(t) = \Psi(x(t), q(t-1)) \end{cases} \qquad (8.1)$$

Уравнения (8.1) называются каноническими уравнениями функции $y = f(x)$. Первое уравнение называется уравнением выход, второе уравнением перехода.

Уравнения (8.1) можно задать с помощью канонической таблицы.

| *x(t)* | *q(t-1)* | *y(t)* | *q(t)* |
|---|---|---|---|
| | | | |

Пусть $x$(t) и y(t) из $\{0,1\}$, а $q(t) \in Q, где\ |Q| = r$. Если вес r ≤ 2, то каноническая таблица есть таблица истинности. Если r > 2, то каноническая таблица не является таблицей истинности. Но с помощью кодирования всех чисел алфавита $Q$ в двоичной системе счисления мы её можем преобразовать в таблицу истинности.

Рассмотрим теперь функцию от n переменных $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P^2_{O.D}$ с весом r > 1, $Q = \{0,1,2,\dots,r-1\}$ – внутренний алфавит. Закодируем все числа из алфавита $Q$ в двоичной системе счисления наборами из $\{0,1\}$ длинной $l = [\log_2 r] + 1$. В этом случае канонические уравнения искомой функции имеют вид:

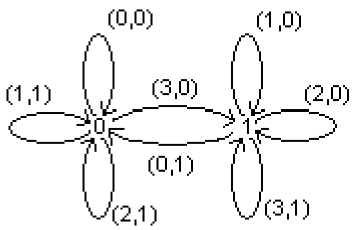
$$\begin{cases} y(t) = \Phi(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), q_2(t-1), \ldots, q_l(t-1) \\ q_1(t) = \Psi_1(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), q_2(t-1), \ldots, q_l(t-1) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ q_l(t) = \Psi_l(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), q_2(t-1), \ldots, q_l(t-1) \end{cases} \tag{8.2}$$

В дальнейшем договоримся, что начальные состояния в канонических уравнениях (8.2) $q(0) = 0$, а в уравнениях (8.1) $q_1(0) = q_2(0) = \ldots = q_l(0) = 0$.

**Пример 8** Найти канонические уравнения функции

$z = f(x, y) = x + y \in P^2_{O.D.}$

Ранее мы показали, что вес данных функций равен 2 и её диаграмма Мура




Построим каноническую таблицу.

| $x$(t) | y(t) | q(t-1) | z(t) | q(t) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Данная каноническая таблица является таблицей истинности.

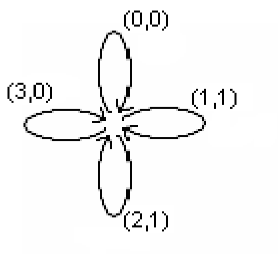
Запишем канонические уравнения, используя результаты темы 3.

$$\begin{cases} z(t) = \overline{x}(t)\overline{y}(t)q(t-1) \vee \overline{x}(t)y(t)\overline{q}(t-1) \vee x(t)\overline{y}(t)q(t-1) \vee x(t)y(t)q(t-1); \\ q(t) = \overline{x}(t)y(t)q(t-1) \vee x(t)\overline{y}(t)q(t-1) \vee x(t)y(t)\overline{q}(t-1) \vee x(t)y(t)q(t-1). \end{cases}$$

Используя законы алгебры логики:

$$\begin{cases} z(t) = x(t) + y(t) + q(t-1); \\ q(t) = y(t)q(t-1) \vee x(t)q(t-1) \vee x(t)q(t); \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

**Пример 9** Найти каноническое уравнение для функции заданной следующей диаграммой Мура



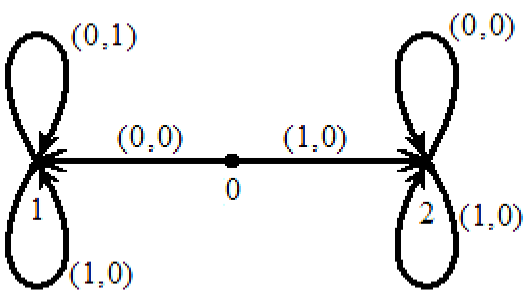

Строим каноническую таблицу.

| *x(t)* | *y(t)* | *q(t-1)* | *z(t)* | *q(t)* |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Отсюда $\begin{cases} z(t) = x(t) + y(t); \\ q(0) = 0. \end{cases}$

Заметим, что если вес функции равен 1, то в канонических уравнениях $q(t-1)$ будет отсутствовать.

**Пример 10** Найти канонические уравнения ограниченно-детерминированной функции, заданной следующей диаграммой Мура**:**




Ясно, что вес данной функции равен 3. Построим каноническую таблицу для данной функции:

| *x(t)* | *q(t-1)* | *y(t)* | *q(t)* |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 2 | 0 | 2 |
| 1 | 0 | 0 | 2 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 2 | 0 | 2 |

Данная таблица не является таблицей истинности. Преобразуем данную таблицу в таблицу истинности. Для этого значения второго и четвёртого столбца закодируем в двоичной системе счисления:

| *x(t)* | $q_1(t-1)$ | $q_2(t-1)$ | *y(t)* | $q_1(t)$ | $q_2(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | Не определена | | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | Не определена | | |

Доопределим данную функцию следующим образом:

| $x$(t) | $q_1(t-1)$ | $q_2(t-1)$ | y(t) | $q_1(t)$ | $q_2(t)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Составим канонические уравнения, используя аппарат булевой алгебры:

1) $y(t)=\overline{x(t)}\;\overline{q_1(t-1)}\;q_2(t-1)\vee\overline{x(t)}\;q_1(t-1)q_2(t-1)\vee x(t)q_1(t-1)q_2(t-1)=$

$$= \overline{x(t)}\ \overline{q_1(t-1)}q_2(t-1) \vee q_1(t-1)q_2(t-1)(\overline{x(t)} \vee x(t)) =$$

$$= \overline{x(t)}\ \overline{q_1(t-1)}q_2(t-1) \vee \vee q_1(t-1)q_2(t-1) = q_2(t-1)(\overline{x(t)}\ \overline{q_1(t-1)} \vee q_1(t-1))\,;$$

2) $q_1(t) = (x(t) \vee q_1(t-1) \vee q_2(t-1))(x(t) \vee q_1(t) \vee \overline{q_2(t-1)})\cdot$

$\cdot(\overline{x(t)} \vee q_1(t-1) \vee \overline{q_2(t-1)}) = (x(t) \vee q_1(t-1))(\overline{x(t)} \vee q_1(t-1) \vee \overline{q_2(t-1)}) =$

$= q_1(t-1) \vee x(t)(\overline{x(t)} \vee \overline{q_2(t-1)}) = q_1(t-1) \vee x(t)\overline{q_2(t-1)}$;

3) $q(t) = (x(t) \vee \overline{q_1(t-1)} \vee q_2(t-1))(\overline{x(t)} \vee q_1(t-1) \vee q_2(t-1))(\overline{x(t)} \vee$

$\vee \overline{q_1(t-1)} \vee q_2(t-1)) = (\overline{q_1(t-1)} \vee q_2(t-1))(\overline{x(t)} \vee q_1(t-1) \vee q_2(t-1)) =$

$= q_2(t-1) \vee \overline{q_1(t-1)}(\overline{x(t)} \vee q_1(t-1)) = q_2(t-1) \vee \overline{q_1(t-1)x(t)}.$

Итак, искомые канонические уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} y(t) = q_2(t-1)(\overline{x(t)} \vee q_1(t-1)); \\ q_1(t) = q_1(t-1) \vee x(t)\overline{q_2(t-1)}; \\ q_2(t) = q_2(t-1) \vee \overline{q_1(t-1)}x(t); \\ \qquad q_1(0) = q_2(0) = 0. \end{cases}$$

Каждой ограниченно-детерминированной функции можно сопоставить канонические уравнения. Однако выбор канонических уравнений не однозначен. Эта неоднозначность связана:

1) с различными способами кодирования состояний;

2) с различными способами доопределения функций.

Очевидно, что канонические уравнения позволяют вычислить
по входной последовательности $a=\{a(1),a(2),\ldots,a(\mathrm{t}),\ldots\}$
выходную последовательность $b=\{b(1),b(2),\ldots,b(\mathrm{t}),\ldots\}$.

Итак, для задания конечного автомата фиксируется три конечных множества (алфавита):

– множество возможных входных сигналов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$;

– множество возможных выходных сигналов $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$;

– множество возможных внутренних состояний автомата $Q = (q_0, q_1, \ldots, q_r)$.

На этих множествах задаются две детерминированные функции:

– функция переходов $\Psi$, определяющая состояние автомата $q(t)$ дискретного времени $t$ в зависимости от состояния автомата $q(t\text{-}1)$ и значения входного сигнала в момент времени $t$: $q(t)= \Psi(x(t),q(t\text{-}1))$;

– функция выходов $\Phi$, определяющая зависимость выходного сигнала автомата $y(t)$ от состояния автомата $q(t\text{-}1)$ и входного сигнала $x(t)$ в момент времени $t$: $y(t)=\Phi(x(t),q(t\text{-}1))$.

Кроме того, на множестве состояний автомата фиксируется одно из внутренних состояний $q(0)$ в качестве начального состояния.

**Вопросы для самоконтроля**

1 Дайте определение детерминированной функции.

2 Приведите примеры детерминированных функций.

3 Приведите примеры недетерминированных функций.

4 Приведите графическую интерпретацию детерминированных функций.

5 Что такое бесконечное нагруженное дерево?

6 Что такое вес бесконечно нагруженного дерева?

7 Какие функции называются ограниченно-детерминированными?

8 Приведите примеры ограниченно-детерминированных функций.

9 Приведите примеры неограниченно-детерминированных функций.

10 Что такое диаграмма Мура?

11 Дайте определение канонических уравнений ограниченно-детерминированных функций.

## ТЕМА 9 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ



Понятие алгоритма стихийно формировалось с древнейших времен. Современный человек понимает под алгоритмом четкую систему инструкций о выполнении в определенном порядке некоторых действий для решения всех задач какого-то данного класса.

Многочисленные и разнообразные алгоритмы окружают нас буквально во всех сферах жизни и деятельности.

Большое количество алгоритмов встречается при изучении математики буквально с первых классов школы. Это, прежде всего, алгоритмы выполнения четырех арифметических действий над различными числами – натуральными, целыми, дробными, комплексными. Примерами известных алгоритмов являются алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел, вычисление определителей различных порядков, вычисление рангов матриц с рациональными элементами, приближенное вычисление корней уравнений и т.д.

В начале 20 века у математиков начали возникать подозрения в том, что некоторые массовые задачи, по-видимому, не имеют алгоритмического решения. Для точного доказательства несуществования алгоритма необходимо иметь его точное математическое определение. Первые работы по уточнению понятия алгоритма и его изучению были выполнены в 1936–1937 гг. А. Тьюрингом, Э. Постом, К. Геделем, А.А. Марковым, А. Черчем. Было выработано несколько определений понятия алгоритма, но впоследствии выяснилось, что все они равносильны между собой, то есть определяют одно и то же понятие.

### 9.1 Машина Тьюринга

Машина Тьюринга есть математическая (воображаемая) машина, а не машина физическая. Она есть такой же математический объект, как функция, производная, интеграл и т.д. А также, как и другие математические понятия, понятие машина Тьюринга отражает объективную реальность, моделирует некие реальные процессы.

Машина Тьюринга состоит из ленты, управляющего устройства и считывающей головки.

Лента разбита на ячейки. Во всякой ячейке в каждый момент времени находится в точности один символ из внешнего алфавита $A=\{a_0,a_1,\dots a_{n-1}\}$, $n\geq 2$. Некоторый символ алфавита $A$ называется пустым, любая ячейка, содержащая в данный момент пустой символ, называется пустой ячейкой.
В дальнейшем в качестве внешнего алфавита будем использовать $A=\{0,1\}$, где в качестве пустого символа будем использовать 0 (нуль). В каждый момент времени лента содержит конечное число ячеек, но в процессе работы машины можно пристраивать новые ячейки в пустом состоянии.

Управляющее устройство в каждый момент времени находит в некотором состоянии $q_i$, принадлежащее множеству $Q\{q_0,q_1,\dots,q_{r-1}\}$, $r\geq 1$. Множество Q называется внутренним алфавитом. В дальнейшем начальное состояние будем обозначать символом $q_1$, а заключительное символом $q_0$.

Считывающая головка перемещается вдоль ленты так, что в каждый момент времени она обозревает ровно одну ячейку ленты. Головка может считывать содержимое обозреваемой ячейки и записывать в нее вместо обозреваемого символа некоторый новый символ из внешнего алфавита.

Работа машины Тьюринга определяется программой. Программа состоит из команд. Каждая команда представляет собой выражение одного из следующего вида:

1) $q_i a_j \to q_k a_e$;
2) $q_i a_j \to q_k a_e R$;
3) $q_i a_j \to q_k a_e L$.

Команда 1 заключается в том, что содержимое $a_j$ обозреваемой на ленте ячейки стирается, а на его место дописывается символ $a_e$ (который может совпадать с $a_j$), машина переходит в новое состояние $q_k$ (оно может совпадать с предыдущим состоянием $q_i$).

Команда 2 работает аналогично команде 1, и дополнительно сдвигает считывающую головку в соседнюю справа ячейку.

Команда 3 работает аналогично команде 1, и дополнительно сдвигает считывающую головку в соседнюю слева ячейку.

Если считывающая головка находится в крайней справа (слева) ячейки ленты и происходит ее сдвиг вправо (влево), то к ленте пристраивается новая ячейка в пустом состоянии.

Машинным словом или конфигурацией называется слово вида

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, q_k a_{i_t}, \dots, a_{i_k},$$

где $a_{i_j} \in$ A, $q_k \in$ Q. Символ $q_k$ пишется перед символом обозреваемой ячейки. Причем символ $q_k$ может быть самым левым, но не может быть самым правым. В дальнейшем будем использовать следующее обозначение: $a_i^n$ обозначает слово $a_i\, a_i\, \dots a_i = a_i^n$

Например, конфигурация $1^3 q_1 0^2 1^2$ на ленте выглядит следующим образом: ▼$q_1$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Машина Тьюринга считается заданной, если заданы программа, внешний и внутренний алфавиты, и указано, какие из символов обозначают начальное и заключительное состояние.

Если машина Тьюринга выходит на заключительное состояние, то она называется остановившейся.

Пусть машина Тьюринга начинает работать в некоторый (начальный) момент времени. Слово, записанное в этот момент на ленте, называется начальным. Чтобы машина Тьюринга начала работать, необходимо поместить считывающую головку против какой-либо ячейки на ленте и указать, в каком состоянии машина Тьюринга находится в данный момент.

Если Р – начальное слово, то машина Тьюринга, начав работу ”на слове” Р либо остановится через определенное число шагов, либо никогда не остановится. В первом случае говорят, что машина Тьюринга применима к слову Р и результатом применения машины к слову Р является слово М, соответствующее заключительной конфигурации.

Во втором случае говорят, что машина не применима к слову Р.

**Пример 1** Выяснить, применима ли машина Тьюринга, задаваемая следующей программой

$q_1 0 \to q_2 0\ R$, $q_1 1 \to q_1 1\ R$, $q_2 0 \to q_3 0\ R$, $q_2 1 \to q_1 1\ L$, $q_3 0 \to q_0 0$ , $q_3 1 \to q_2 1\ R$, к слову $P = q_1\ 1^3 0^2 1^2$.

▼$q_1$

| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|

▼$q_1$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $q_1 1 \to q_1 1\ R$ | $1^3\ q_1 0^2 1^2$ | | 1 1 1 0 0 1 1 |
| $q_1 0 \to q_2 0\ R$ | $1^3 0\ q_2 0 1^2$ | ▼$q_2$ | 1 1 1 0 0 1 1 |
| $q_2 0 \to q_3 0\ R$ | $1^3 0^2\ q_3 1^2$ | ▼$q_3$ | 1 1 1 0 0 1 1 |
| $q_3 1 \to q_2 1\ R$ | $1^3 0^2 1\ q_2 1$ | ▼$q_2$ | 1 1 1 0 0 1 1 |
| $q_2 1 \to q_1 1\ L$ | $1^3 0^2\ q_1 1^2$ | ▼$q_1$ | 1 1 1 0 0 1 1 |
| $q_1 1 \to q_1 1\ R$ | $1^3 0^2 1^2\ q_1 0$ | ▼$q_1$ | 1 1 1 0 0 1 1 0 |
| $q_1 0 \to q_2 0\ R$ | $1^3 0^2 1^2\ 0 q_2 0$ | ▼$q_2$ | 1 1 1 0 0 1 1 0 0 |
| $q_2 0 \to q_3 0\ R$ | $1^3 0^2 1^2\ 0^2 q_3 0$ | ▼$q_3$ | 1 1 1 0 0 1 1 0 0 0 |
| $q_3 0 \to q_0 0$ | $1^3 0^2 1^2\ 0^2 q_0 0$ | ▼$q_0$ | 1 1 1 0 0 1 1 0 0 0 |

Следовательно, данная машина Тьюринга применима к слову Р и заключительная конфигурация имеет вид: $1^3 0^2 1^2 0^2 q_0 0$.

В дальнейшем запись $M \underset{T}{\Rightarrow} M_1$ , будет означать, что машина Тьюринга (Т) через конечное число циклов перерабатывает машинное слово М в машинное слово $M_1$.

Функция называется вычислимой по Тьюрингу, если существует машина Тьюринга, вычисляющая её.

Во-первых, напомним, что речь идёт о частично-числовых функциях. Во-вторых, договоримся, что значения $x_1, x_2, ..., x_n$ аргументов функции $f\,(x_1, x_2 \ldots x_n)$ на ленте будут записываться следующим образом:

$$0\underbrace{11\ldots11}_{x_1}\;0\underbrace{11\ldots1}_{x_2}\;0\ldots0\underbrace{11\ldots1}_{x_n}\;0,$$

или $01^{x_1}01^{x_2}0\ldots01^{x_n}0$.

Начинать переработку данного слова будем из стандартного положения, то есть из положения, при котором в состоянии $q_1$ обозревается крайняя правая единица описанного слова. Если функция $f\,(x_1, x_2 \ldots x_n)$ определена на данном наборе значений аргументов, то в результате на ленте должно быть записано подряд $f\,(x_1, x_2 \ldots x_n)$ единиц, в противном случае, машина должна работать бесконечно. При выполнении всех перечисленных условий, будем говорить, что машина Тьюринга вычисляет данную функцию $f$.

**Пример 2** Построить машину Тьюринга, вычисляющую функцию O(x) = 0. Для этого надо сконструировать машину Тьюринга (Т), (т.е. составить программу) которая начинает работу со слова $q_1 01^x$ ($x$ – любое натуральное число) останавливается, когда на ленте нет единиц

$q_1 01^x => q_0 0$

Данная программа имеет вид:

$q_10 \to q_20R$

$q_20 \to q_0O$

$q_21 \to q_20R$

**Пример 3** Построить машину Тьюринга, вычисляющую функцию: $f(x,y) = x + y$. Построим машину Тьюринга (Т), которая, начиная работу со слова $q_1 01^x 01^7$ останавливается когда на ленте $x+y$ единиц

$q_1 01^x 01^7 \Rightarrow q_0 01^{x+y}$

| | |
|---|---|
| $q_10 \to q_20R$ | $q21^x 01^y$ |
| $q_20 \to q_0OR$ | $q_001^y$ |
| $q_21 \to q_31$ | $q_31^x 01^y$ |
| $q_31 \to q_31R$ | $1^x q_3 01^y$ |
| $q_30 \to q_41$ | $1^x q_4 1^{y+1}$ |
| $q_41 \to q_41L$ | $q_4 01^{x+y+1}$ |
| $q_40 \to q_50R$ | $q_5 1^{x+y+1}$ |
| $q_51 \to q_00$ | $q_0 01^{x+y}$ |

**Пример 4** Построить машину Тьюринга, вычисляющую функцию $f(x) = 2/x$. Эта функция не всюду определена. Лишь при $x = 1$, $x = 2$, её значениями являются натуральные числа $2$ и $1$ соответственно. Поэтому можно построить машину Тьюринга, которая начинает работу либо со слова $q_101$, либо со слова $q_101^2$ останавливается, когда на ленте две единицы, одна единица соответственно. В остальных случаях машина начина-

ет работу со слов $q_2 01^x$ $(x \neq 1,\ x \neq 2)$ работает бесконечно. Такая машина задаётся следующей программой:

| | |
|---|---|
| $q_2 0 \rightarrow q_2 0R$ | $q_2 1^x$ |
| $q_2 0 \rightarrow q_2 0$ | $x = 0$ |
| $q_2 1 \rightarrow q_3 1R$ | $1\ q_3 1^{x-1}$ |
| $q_3 0 \rightarrow q_0 1L$ | $q_0 1^2,\ x = 2$ |
| $q_3 1 \rightarrow q_4 1R$ | $1^2\ q_4 1^{x-2}$ |
| $q_4 1 \rightarrow q_4 1$ | $x > 2$ |
| $q_4 0 \rightarrow q_5 0L$ | $1\ q_5 1$ |
| $q_5 1 \rightarrow q_0 0L$ | $q_0 1,\ x = 2$ |

## 9.2 Рекуррентные функции

В дальнейшем под множеством натуральных чисел $N$ будем понимать множество $N = \{0,1,2,\ldots,k,\ldots\}$

Пусть $y = f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ – функция от $n$ переменных. Обозначим $D(y)$ – область определения функции $y = f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$, $E(y)$ – область значений функции $y = f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$.

Функция $y = f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ называется числовой функцией, если:

1) $D(y)=N \times\cdot N \cdot\times \ldots \times\cdot N = N^n$;

2) $E(y) \subseteq N$

Функция $y = f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ называется частично числовой функцией, если:

1) $D(y) \subseteq N \times\cdot N\cdot\times\ldots\times\cdot N = N^n$;

2) $E(y) \subseteq N$.

Следующие числовые функции мы будем называть простейшими:

1) $O(x) = 0$ – нуль-функция

2) $I_m^n(x_1, x_2,..., x_n) = x_m$ , $1 \leq m \leq n$ – функция повторяющая значение своих аргументов;

3) $S(x) = x+1$ – функция следования.

Определим следующие три операции: суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации.

**Операция суперпозиции**

Будем говорить, что $n$ – местная функция $\varphi$ получается из $m$ – местной функции $\psi$ и $n$ – местных функций $f_1,f_2,...,f_m$ с помощью операции суперпозиции, если для всех $x_1,x_2,...,x_n$ справедливо равенство:

$$\varphi (x_1,x_2,...,x_n) = \psi( f_1(x_1, x_2,..., x_n),..., f_m(x_1, x_2,..., x_n))$$

**Операция примитивной рекурсии**

Будем говорить, что $(n+1)$ – местная функция $f$ получается из $n$ – местной функции g и $(n+2)$ – местной функции $h$ с помощью операции примитивной рекурсии, если при любых значениях $x_1, x_2,..., x_n$ выполняются равенства:

$$f(x_1, x_2,..., x_n, 0) = g (x_1, x_2,..., x_n)$$

$$f(x_1, x_2,..., x_n, 1) = h(x_1, x_2,..., x_n , 0, f(x_1, x_2,..., x_n, 0))$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$f(x_1, x_2,..., x_n, y+1 ) =h(x_1, x_2,..., x_n, y, f(x_1, x_2,..., x_n,y))$$

Эти равенства называют схемой примитивной рекурсии. И тот факт, что функция $f$ получается из функций $g, h$ с помощью операции примитивной рекурсии, записывается следующим образом: $f=R(g,h)$.

**Определение 1** Функция $f$ называется примитивно рекурсивной функцией, если она получается из простейших функций с помощью операций суперпозиции и примитивной рекурсии, взятых конечное число раз в любой последовательности.

Из данного определения следует, что любая примитивно рекурсивная функция является числовой функцией.

Множество всех примитивно рекурсивных функций обозначим через $P_{п.р.}$

**Пример 5** Доказать, что функция $f(x,y)= x+y$ примитивно рекурсивна.

Действительно. Справедливы следующие тождества

$f(x,0) =x+0 = x = g( x)$

$f(x,y+1) = x+(y+1) = (x+y)+1 = f(x,y)+1$

Отсюда следует, что $x+y = R(g(x) = x,\ h(x,y,z) = z+1)$. Так как функции $g$, $h$ – простейшие функции, то $x + y \in P_{п.р.}$

**Пример 6** Доказать, что функция $f(x,y) = x{\cdot}y$ примитивно рекурсивна.

Действительно. Справедливы следующие тождества:

$f(x,0) = x{\cdot}0 = 0 = g(x)$

$f(x,y+1) = x(y+1) = xy+x = f(x, y) + x$

Отсюда следует, что

$x+y = R(g(x) = 0,\ h(x,y ,z) = z+ x)$

Как следует из примера 1 функция $h(x,y,z) = x+z \in P_{п.р.}$ А это значит, что $xy \in P_{п.р.}$

Рассмотрим функцию $x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, если\ x \geq y; \\ 0, если\ x < y. \end{cases}$

Данную функцию называют усечённой разностью.

**Пример 7** Показать, что функция $f(x,y) = x \dot{-} y$ примитивно рекурсивна.

В начале заметим, что функция $x \dot{-} 1$ примитивно рекурсивна. Действительно:

$0 \dot{-} 1 = 0 = g(x)$

$(x+1) \dot{-} 1 = x = h(x,y)$

Следовательно, $x \dot{-} 1 = R(g(x) = 0,\ h(x,y) = x)$. Итак, $x \dot{-} 1 \in P_{п.р.}$

Далее, нетрудно показать, исходя из определения усечённой разности, что эти функции удовлетворяют также равенствам:

$$x \dot{-} 0 = x = g(x)$$

$$x \dot{-} (y+1) = (x \dot{-} y) \dot{-} 1 = h(x, y, x \dot{-} y)$$

для любых $x$ и $y$. Данные тождества показывают, что

$$x \dot{-} y = R(g(x) = 0,\ h(x,y,z) = z \dot{-} \alpha).$$

Так как функция $h(x,y,z) = z \dot{-} \alpha \in P_{n.p.}$, то $x \dot{-} y \in P_{n.p.}$

Так как любая примитивно рекурсивная функция является числовой функцией, то, очевидно, что $x - y \notin P_{n.p.}$

**Пример 8** Покажем, что $|x-y|$ – примитивно рекурсивная функция.

Действительно. Нетрудно показать, что $|x-y| = (x \dot{-} y)+(y \dot{-} x)$. Теперь полученный результат следует из примера 5 и примера 7.

**Операция минимизации.** Будем говорить, что n-местная функция $g(x_1,x_2,\dots,x_n)$ полученная из $(n+1)$-местной функции $f(x_1,x_2,\dots,x_n,y)$ с помощью операции минимизации или оператора наименьшего числа, если для любых $x_1, x_2,\dots, x_n, y$ равенство $g(x_1,x_2,\dots,x_n) = y$ выполняется тогда и только тогда, когда:

1) $f(x_1,x_2,\dots,x_n,t)$ определено и $f(x_1,x_2,\dots,x_n,t) > 0$ для любых $0 \le t < y$;

2) $f(x_1,x_2,\dots,x_n,y) = 0$.

Если какое-либо из условий 1), 2) будет невыполнено, то функция $g(x_1,x_2,\dots,x_n)$ не определена при наборе $x_1, x_2,\dots, x_n$. Короче говоря, величина $g(x_1,x_2,\dots,x_n)$ равна наименьшему значению аргумента y, при котором выполняется последнее равенство.

Используется следующее обозначение:

$$g(x_1,x_2,\dots,x_n) = M_y\,[f(x_1,x_2,\dots,x_n,y)=0].$$

Про функцию $g$ говорят, что она получена из функции $f$ при помощи операции минимизации.

**Определение 2** Функция $f$ называется частично рекурсивной функцией, если она может быть получена из простейших функций с помощью операции суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации, взятых конечное число раз в любой последовательности.

Класс частично рекурсивных функций обозначим $P_{rp}$.

Обозначим через $P_p$ – класс рекурсивных функций, т.е. всех числовых функций из $P_{гр}$.

**Пример 9** Доказать, что частично числовая функция $g(x) = \frac{x}{2}$ частично рекурсивна.

Вначале заметим, что данная функция получается из функции $f(x, y) = |x - 2y|$ с помощью операции минимизации, т.е. $\frac{x}{2} = \mathrm{M_y}(|x - 2y| = 0)$.

Согласно примерам 2 и 4 функция $f(x, y) = |x - 2y|$ примитивно рекурсивна. А это значит, что $g(x) = \frac{x}{2}$ – частично рекурсивная функция.

Данный пример показывает, что класс $P_{гр}$ существенно шире, чем класс $P_p$. Можно сказать, что и класс $P_p$ существенно шире, чем класс $P_{пр}$, т.е. $P_{пр} \subset P_p \subset P_{гр}$.

### 9.3 Тезисы Тьюринга и Чёрча

Одно из основных свойств алгоритма заключается в том, что он представляет собой единый способ, позволяющий для каждой задачи из искомого бесконечного множества задач за конечное число шагов найти её решение.

На понятие алгоритма можно взглянуть и с несколько иной точки зрения. Каждую задачу из бесконечного множества задач можно выразить (закодировать) некоторым словом некоторого алфавита, а решение задачи каким-то другим словом того же алфавита. В результате получим функцию, заданную на некотором подмножестве множества всех слов выбранного алфавита и принимающую значение в множестве всех слов того же алфавита. Решить какую-либо – значит найти значение этой функции на слове, кодирующем данную задачу. А иметь алгоритм для решения всех задач данного класса – значит иметь единый способ, позволяющий за конечное число шагов «вычислить» значение построенной функции для любых значений аргумента из её области определения. Таким образом, алгоритмическая проблема – по существу проблема о вычислении значений заданной функции в некотором алфавите.

Остается уточнить, что значит уметь вычислить значение функции. Это значит вычислить значение функции с помощью подходящей машины Тьюринга. Для каких же функций возможно их тьюрингово вычисление? Многочисленные исследования ученых показали, что такой класс функций чрезвычайно широк. Каждая функция, для вычисления значений которой существует какой-нибудь алгоритм, оказалась вычисляемой посредством некоторой машины Тьюринга. Это дало повод Тьюрингу высказать следующую гипотезу, называемую основной гипотезой теории алгоритмов или тезисом Тьюринга.

**Тезис Тьюринга.** Для нахождения значений функции, заданной в некотором алфавите, тогда и только тогда существует какой-нибудь алгоритм, когда функция является вычислимой по Тьюрингу, т.е. когда она может вычисляться на подходящей машине Тьюринга.

Это означает, что строгое математическое понятие вычислимое по Тьюрингу функции является идеальной моделью взятого из опыта понятия алгоритма. Данный тезис есть не что иное, как аксиома, постулат, о взаимосвязях нашего опыта с той математической теорией, которую мы под этот опыт хотим подвести. Конечно же, данный тезис в принципе не может быть доказан методами математики, потому что он не имеет внутри математического характера (одна сторона в тезисе – понятие алгоритма – не является точным математическим понятием). Он выдвинут, исходя из опыта, и именно опыт подтверждает его состоятельность.

Впрочем, не исключается принципиальная возможность того, что тезис Тьюринга будет опровергнут. Для этого должна быть указана функция, вычисляемая с помощью какого-нибудь алгоритма, но не вычисляемая на какой-нибудь машине Тьюринга. Но такая возможность представляется маловероятной.

Подобно тезису Тьюринга в теории рекурсивной функции выдвигается соответствующая гипотеза, носящая название тезиса Чёрча.

**Тезис Чёрча.** Числовая функция тогда и только тогда алгоритмически вычислима, когда она рекурсивна.

И эта гипотеза не может быть доказана строго математически, она подтверждается практикой, опытом, ибо призвана увязать практику и теорию. Все рассматриваемые в математике конкретные функции, вычислимые в алгоритмическом смысле, оказались рекурсивными.

Мы познакомились с несколькими теориями, каждая из которых уточняет понятие алгоритма. Возникает вопрос, как связаны эти теории между собой. Ответ на него дает следующая теорема.

**Теорема 1** *Следующие классы функций (заданные на натуральных числах и принимающие натуральное значение) совпадают.*

*1) Класс всех функций вычислимых по Тьюрингу;*

*2) Класс всех рекурсивных функций.*

Это уже не гипотеза и не тезис, а математическая теорема, которая строго доказывается.

Можно отметить, что существуют ещё и другие теории алгоритмов, и для всех них также доказана их равнозначность с рассматриваемыми теориями.

В 1936 году Чёрчем было доказано, что не существует алгоритма, позволяющего для каждой формулы логики предикатов определить, будет ли она выполнимой или общезначимой.

Одной из наиболее знаменитых алгоритмических проблем математики являлась 10-я проблема Гильберта, поставленная им в числе других в 1901 году на Международном математическом конгрессе. Требовалось найти алгоритм, определяющий для любого диофантова уравнения, имеет ли оно целочисленное решение.

Диофантово уравнение есть уравнение вида $F(x, y,..., z) = 0,$ где $F(x, y,..., z)$ – многочлен с целыми показателями степеней и целыми коэффициентами. В общем случае эта проблема долго оставалась нерешенной и только в 1970 году советский математик Ю. В. Матиясевич доказал её неразрешимость.

В заключение ещё раз отметим, что алгоритмическая неразрешимость означает лишь отсутствие единого способа для решения всех задач данной бесконечной серии, в то же время каждая индивидуальная задача вполне может быть решена индивидуальным способом. Так, например, несмотря на отсутствие единого алгоритма, определяющего имеет ли диофантово уравнение целочисленное решение, для частного случая диофантово уравнение $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + x_0 = 0$ хорошо известно, что все его целые корни следует искать среди делителей свободного члена $a_0$.

**Вопросы для самоконтроля**

1 Что Вы понимаете под машиной Тьюринга?

2 Из каких частей состоит машина Тьюринга?

3 Дайте определение машинного слова.

4 Какая функция называется числовой?

5 Какая функция называется частично-числовой?

6 Дайте определение функции, вычислимой по Тьюрингу.

7 Какие функции называются простейшими?

8 Дайте определение операции суперпозиции.

9 Дайте определение операции примитивной рекурсии.

10 Дайте определение операции минимизации.

11 Сформулируйте тезис Черча.

12 Сформулируйте тезис Тьюринга.

13 Какая связь между функциями, вычисляемыми по Тьюрингу и частично рекурсивными функциями?

## ЛИТЕРАТУРА

1 Карпов, В. Г. Математическая логика и дискретная математика [Текст] : учебное пособие для студентов университетов / В.Г.Карпов, В. А. Мощенский. – Мн. : Вышэйшая школа, 1977. – 255с.

2 Яблонский, С. В. Введение в дискретную математику [Текст] : учебное пособие для вузов по специальности «Прикладная математика» / С. В. Яблонский. – М. : Наука, 1979. – 272с.

3 Мощенский, В. А. Лекции по математической логике [Текст] : учебное пособие для студентов математических специальностей вузов / В. А. Мощенский. – Мн. : Изд. Центр БГУ, 1973. – 159с.

4 Лавров, И. А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов [Текст] : учебное пособие для студентов математических специальностей вузов / И. А. Лавров, Л. Л. Максимова. – 2-е стер. – М. : Наука, 1984. – 223с.

5 Гаврилов, Г. П. Сборник задач по дискретной математике [Текст] : учебное пособие для вузов по специальности «Прикладная математика»/ Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. – М. : Наука, 1984. – 223с.

**Учебное издание**

**Семенчук Владимир Николаевич**

# ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

**КУРС ЛЕКЦИЙ**

***для студентов специальности***
***1-31 03 03 «Прикладная математика»***

Редактор В.И. Шкредова
Корректор В.В. Калугина

Лицензия № 02330/0133208 от 30.04.04.
Подписано в печать . Формат 60х84 1/16.
Бумага писчая № 1. Гарнитура «Таймс» . Усл. п. л. .
Уч.-изд.л. . Тираж 120 экз. Заказ № .

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе
учреждения образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
Лицензия № 02330/0056611 от 16.02.04.
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104